



Logică Matematică

Anul I, Semestrul II 2026

Laurențiu Leuștean

<https://cs.unibuc.ro/~lleustean/2026-LM/index.html>



Preliminarii



Operații cu mulțimi

Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$A = B$ ddacă pentru orice $x \in T$, $x \in A$ ddacă $x \in B$

$A \subseteq B$ ddacă pentru orice $x \in T$, $x \in A$ implică $x \in B$

$A \subset B$ ddacă $A \subseteq B$ și $A \neq B$

$A \cup B = \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

$A - B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$

$C_T A = T - A = \{x \in T \mid x \notin A\}$

Mulțimea părților lui T se notează 2^T sau $\mathcal{P}(T)$. Așadar,
 $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.

Notații: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ este mulțimea numerelor naturale;
 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Z}$ este mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor reale; $\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor raționale.



Produsul cartezian

Notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b (care sunt **componentele** lui (a, b)).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$;
 $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale ddacă $a = c$ și $b = d$.

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$



Fie A și B mulțimi și $f : A \rightarrow B$ o funcție.

Spunem că f este **definită pe A cu valori în B** , A se numește **domeniul de definiție** al funcției f și B se numește **domeniul valorilor** lui f sau **codomeniul** lui f .

Notăție: Mulțimea funcțiilor de la A la B se notează $\text{Fun}(A, B)$, B^A sau $(A \rightarrow B)$.

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție, $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- ▶ $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este **imaginea directă** a lui X prin f ; $f(A)$ este **imaginea** lui f .
- ▶ $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este **imaginea inversă** a lui Y prin f .
- ▶ Fie $f|_X : X \rightarrow B$, $f|_X(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Funcția $f|_X$ este **restricția** lui f la X .



Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție.

- ▶ f este **injectivă** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- ▶ f este **surjectivă** dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- ▶ f este **bijectivă** dacă f este injectivă și surjectivă.



Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ două funcții. **Compunerea** lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcția identică a lui A este $1_A : A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$.

O funcție $f : A \rightarrow B$ este **inversabilă** dacă există $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Funcția g este unică, se numește **inversa** lui f și se notează f^{-1} .

O funcție este bijectivă dacă este inversabilă.

Fie $f : A \rightarrow A$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim $f^n : A \rightarrow A$ astfel:

$$f^0 = 1_A, \quad f^{n+1} = f^n \circ f \text{ pentru } n \geq 0.$$



Funcția caracteristică

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. **Funcția caracteristică** a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Proprietăți

Dacă $A, B \subseteq T$ și $x \in T$ atunci

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$\chi_{C_T A}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Observație

Funcția caracteristică se poate folosi pentru a arăta că două mulțimi sunt egale: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.



Definiție

O **relație binară** între A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

O relație binară pe A este o submulțime a lui $A \times A$.

Exemple

$$\triangleright \mid \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\mid = \{(k, n) \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$$

$$\triangleright < \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$< = \{(k, n) \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$$



Operații cu relații

Fie A, B, C mulțimi.

Definiție

- ▶ Dacă $R \subseteq A \times B$, atunci **relația inversă** $R^{-1} \subseteq B \times A$ este definită astfel:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

- ▶ Dacă $R \subseteq A \times B$ și $Q \subseteq B \times C$, atunci **compunerea** lor $Q \circ R \subseteq A \times C$ este definită astfel:
 $Q \circ R = \{(a, c) \mid \text{există } b \in B \text{ a.î. } (a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in Q\}.$
- ▶ **Diagonala** lui A este $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}.$

Exercițiu

- ▶ Compunerea relațiilor este asociativă.
- ▶ Dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R.$



Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A \times A$ o relație binară pe A .

Notăție: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiție

- ▶ R este **reflexivă** dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **ireflexivă** dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **simetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx .
- ▶ R este **antisimetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$,
 xRy și yRx implică $x = y$.
- ▶ R este **tranzitivă** dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
 xRy și yRz implică xRz .
- ▶ R este **totală** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx .



Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A se numește **relație de echivalență** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Notații: Vom nota relațiile de echivalență cu $\sim$. Scriem $x \sim y$ dacă $(x, y) \in \sim$ și $x \not\sim y$ dacă $(x, y) \notin \sim$.

Fie A o mulțime nevidă și $\sim$ o relație de echivalență pe A .

Definiție

Pentru orice $x \in A$, **clasa de echivalență** $[x]$ a lui x este definită astfel: $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$.



Proprietăți

- ▶ $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- ▶ $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- ▶ $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Definiție

Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte ale elementelor lui A se numește **mulțimea cât** a lui A prin $\sim$ și se notează $A/\sim$. Aplicația $\pi : A \rightarrow A/\sim$, $\pi(x) = [x]$ se numește **funcția cât**.



Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A este relație de

- ▶ **ordine parțială** dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ▶ **ordine strictă** dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ▶ **ordine totală** dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu $\leq$, iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

Definiție

Dacă $\leq$ este o relație de ordine parțială (totală) pe A , spunem că $(A, \leq)$ este **mulțime parțial (total) ordonată**.



Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Proprietăți

- ▶ Orice relație de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulțime total ordonată este mulțime parțial ordonată.
- ▶ Relația $<$ definită prin $x < y \iff x \leq y$ și $x \neq y$ este relație de ordine strictă.
- ▶ Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci $(S, \leq)$ este mulțime parțial ordonată.

Dem.: Exercițiu.



Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in S$ se numește

- ▶ **element minimal** al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \leq e$ implică $a = e$;
- ▶ **element maximal** al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $e \leq a$ implică $a = e$;
- ▶ **cel mai mic element** (sau **minim**) al lui S , notat $\min S$, dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- ▶ **cel mai mare element** (sau **maxim**) al lui S , notat $\max S$, dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$.



Proprietăți

- ▶ Atât minimul, cât și maximul lui S sunt unice (dacă există).
- ▶ Dacă $\min S$ există, atunci $\min S$ este unicul element minimal al lui S .
- ▶ Dacă $\max S$ există, atunci $\max S$ este unicul element maximal al lui S .
- ▶ S poate avea mai multe elemente maxime sau minime.
- ▶ Un element minimal (maximal) al lui S nu este în general minim (maxim) al lui S .

Dem.: Exercițiu.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in A$ se numește

- ▶ **majorant** al lui S dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$;
- ▶ **minorant** al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- ▶ **supremum** al lui S , notat $\sup S$, dacă e este cel mai mic majorant al lui S ;
- ▶ **infimum** al lui S , notat $\inf S$, dacă e este cel mai mare minorant al lui S .

Proprietăți

- ▶ Atât mulțimea majoranților, cât și mulțimea minoranților lui S pot fi vide.
- ▶ Dacă există, atât supremumul, cât și infimumul lui S sunt unice.



Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

Spunem că $(A, \leq)$ este mulțime **bine ordonată** dacă orice submulțime nevidă a lui A are minim. În acest caz, $\leq$ se numește relație de **bună ordonare** pe A .

Exemple

$(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, \leq)$ nu este bine ordonată.

Observație

Orice mulțime bine ordonată este total ordonată.



Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

$(A, \leq)$ se numește **inductiv ordonată** dacă orice submulțime total ordonată a sa admite un majorant.

Lema lui Zorn

Orice mulțime inductiv ordonată are un element maximal.

- un instrument foarte util în demonstrații.

Fie I o mulțime nevidă.

Fie A o mulțime. O **familie** de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \rightarrow A$. Notăm cu $(a_i)_{i \in I}$ familia $f : I \rightarrow A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i , obținem o **familie (indexată) de mulțimi** $(A_i)_{i \in I}$.

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T . Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i \in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid \text{există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$

Dacă $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i, j \in I$, $i \neq j$, spunem că $\bigcup_{i \in I} A_i$ este o **reuniune disjunctă**.



Produsul cartezian al unei familii

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i \in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i \in I} A_i &= \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \}.\end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, aplicația $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$, $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$ se numește **proiecție canonică** a lui $\prod_{i \in I} A_i$. π_j este surjectivă.

Exercițiu. Fie I, J mulțimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i \in I} A_i \times \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j) \quad \text{și} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j).$$



$$I = \{1, \dots, n\}$$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \dots, n\}$ și $A_1, \dots, A_n \subseteq T$.

► $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \dots, x_n)$, un **n -tuplu (ordonat)**

$$\text{► } \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ și } \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

$$\text{► } \prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n \text{ și } A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_n$$

Definiție

O **relație n -ară** între $A_1, \dots, A_n$ este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^n A_i$.

O relație n -ară pe A este o submulțime a lui A^n . Dacă R este relație n -ară, spunem că n este **aritatea** lui R .



Axioma alegerii (în engleză Axiom of Choice) (AC)

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci există o funcție f_C care asociază la fiecare $i \in I$ un element $f_C(i) \in A_i$.

- ▶ formulată de [Zermelo](#) (1904)
- ▶ a provocat discuții aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi funcția alegere f_C .

Reformulare

Următoarea afirmație este echivalentă cu Axioma alegerii:

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci $\prod_{i \in I} A_i$ este o mulțime nevidă.



- ▶ Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- ▶ Cohen (1963) a demonstrat că negația axiomei alegerii este consistentă cu ZF. Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF. Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- ▶ Lema lui Zorn
- ▶ Principiul bunei ordonări: Orice mulțime nevidă X poate fi bine ordonată (adică, pentru orice X există o relație binară $\leq$ pe X a.î. $(X, \leq)$ este mulțime bine ordonată).

H. Rubin, J. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice II*, North Holland, Elsevier, 1985



Definiția 1.1

Spunem că A este **echipotentă** cu B dacă există o bijecție $f : A \rightarrow B$. **Notatie:** $A \sim B$.

Propoziția 1.2

Pentru orice mulțimi A, B, C au loc:

- (i) $A \sim A$.
- (ii) Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$.
- (iii) Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

Dem.: Exercițiu.

Observație

Prin urmare, A este echipotentă cu B dacă B este echipotentă cu A . De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.

Definiția 1.3

O mulțime A se numește **finită** dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. A este echipotentă cu $\{0, 1, \dots, n-1\}$. În acest caz, notăm cu $|A|$ numărul elementelor lui A .

O mulțime care nu este finită se numește **infinită**.

Definiția 1.4

O mulțime A este **numărabilă** dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.

O mulțime finită sau numărabilă se numește **cel mult numărabilă**.

Exemple

- ▶ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.
- ▶ Orice submulțime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Teoremă Cantor

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nu este mulțime numărabilă.



Cardinale



Numerele cardinale sau **cardinalele** sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Definiția 2.1

*Pentru orice mulțime A , **cardinalul** lui A (sau **numărul cardinal** al lui A) este un obiect $|A|$ asociat lui A a.î. sunt satisfăcute următoarele:*

- ▶ $|A|$ este unic determinat de A .
- ▶ pentru orice mulțimi A, B , avem că $|A| = |B|$ ddacă $A \sim B$.

Această definiție nu specifică natura obiectului $|A|$ asociat unei mulțimi A .



Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.

Un posibil răspuns este:

definim $|A|$ ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipotente cu A .

Un alt răspuns este definiția lui von Neumann din teoria axiomatică a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime A , $|A|$ este tot o mulțime.

Colecția tuturor cardinalelor nu este mulțime, ci **clasă**. Vom nota cu **Card** clasa tuturor cardinalelor.

Notăm cardinalele cu $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \dots$.



Definiția 2.2

α este **cardinal** dacă există o mulțime A a.î. $\alpha = |A|$. Spunem, în acest caz, că A este un **reprezentant** al lui α .

Desigur, orice mulțime echipotentă cu A este, de asemenea, reprezentant al lui α .

Definiția 2.3

Fie $\alpha = |A|$ un cardinal. Dacă A este finită (respectiv infinită), spunem că α este un **cardinal finit** (respectiv **cardinal infinit**).

Notății

- ▶ Notăm $\mathbf{0} := |\emptyset|$ și, pentru orice $n \geq 1$, $\mathbf{n} := |\{0, 1, \dots, n-1\}|$.
- ▶ $|\mathbb{N}|$ se notează $\aleph_0$ (se citește *alef zero*).
- ▶ $|\mathbb{R}|$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și **puterea continuumului**.



Observația 2.4

- (i) O mulțime A este finită ddacă există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathbf{n} = |A|$. Prin urmare, putem identifica cardinalul $|A|$ cu numărul elementelor lui A .
- (ii) O mulțime A este numărabilă ddacă $|A| = \aleph_0$.

Observația 2.5

- (i) Pentru orice mulțime A , $\text{Fun}(\emptyset, A)$ are un singur element, **funcția vidă**. Prin urmare, $|\text{Fun}(\emptyset, A)| = \mathbf{1}$.
- (ii) Pentru orice mulțime nevidă A , $\text{Fun}(A, \emptyset) = \emptyset$, deci $|\text{Fun}(A, \emptyset)| = \mathbf{0}$.



Definiția 2.6

Definim următoarea relație: pentru orice cardinale $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$,

$$\alpha \leq \beta \iff \text{există o funcție injectivă } f : A \rightarrow B.$$

Observația 2.7

Definiția relației $\leq$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Demonstrăm că

$$\alpha \leq \beta \iff \text{există o funcție injectivă } g : A' \rightarrow B'.$$

$\Rightarrow$ Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție injectivă. Atunci

$g := v \circ f \circ u^{-1} : A' \rightarrow B'$ este injectivă.

$\Leftarrow$ Avem că $f := v^{-1} \circ g \circ u : A \rightarrow B$ este injectivă.

Deci, definiția nu depinde de reprezentanții A și B .





Relației $\leq$ se asociază o nouă relație, definită astfel:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \leq \beta \text{ și } \alpha \neq \beta.$$

Propoziția 2.8

- (i) Pentru orice mulțimi A, B , dacă $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$.
- (ii) Pentru orice cardinal finit α , avem că $\alpha < \aleph_0$.
- (iii) Pentru orice mulțime A și orice cardinal α , dacă $\alpha \leq |A|$, atunci există o submulțime B a lui A a.î. $|B| = \alpha$.
- (iv) $0 \leq \alpha$ pentru orice cardinal α .
- (v) $1 \leq \alpha$ pentru orice cardinal $\alpha \neq 0$.
- (vi) Relația $\leq$ este reflexivă și tranzitivă.

Dem.: Exercițiu.



Următorul rezultat este fundamental.

Teorema 2.9 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie A și B două mulțimi astfel încât există $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.

Dem.: (Schiță). Pentru orice $n \geq 0$, definim

$$h_n := (g \circ f)^n : A \rightarrow A, \quad A_n := h_n(A) \subseteq A, \quad B_n := h_n(g(B)) \subseteq A.$$

Evident, $h_0 = 1_A$, $A_0 = A$ și $B_0 = g(B)$. De asemenea, h_n este injectivă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $h_m \circ h_n = h_{m+n}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

Afirmația 1: Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subseteq A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$. Prin urmare, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt șiruri descrescătoare de mulțimi a.î. $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \bigcap_{n \geq 0} B_n$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.



Introducem următoarele notații:

$$C := \bigcap_{n \geq 0} A_n \quad \text{și, pentru orice } n \in \mathbb{N}, \quad A'_n := A_n - B_n, \quad B'_n := B_n - A_{n+1}.$$

Se observă ușor că mulțimile C , $\bigcup_{n \geq 0} A'_n$ și $\bigcup_{n \geq 0} B'_n$ sunt disjuncte două câte două.

Afirmația 2: $A = C \cup \bigcup_{n \geq 0} A'_n \cup \bigcup_{n \geq 0} B'_n$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.



Definim

$$\Phi : A \rightarrow B, \quad \Phi(a) = \begin{cases} f(a) & \text{dacă } a \in C \cup \bigcup_{n \geq 0} A'_n \\ b & \text{dacă } a \in \bigcup_{n \geq 0} B'_n \text{ și } b \text{ este unicul element} \\ & \text{din } B \text{ a.î. } g(b) = a. \end{cases}$$

Observăm că Φ e bine definită pe a doua ramură: deoarece

$$\bigcup_{n \geq 0} B'_n \subseteq \bigcup_{n \geq 0} B_n = B_0 = g(B),$$

avem, în acest caz, $a \in g(B)$. Din injectivitatea funcției g , rezultă că există un unic $b \in B$ a.î. $g(b) = a$.

Afirmația 3: Φ este bijectivă.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Prin urmare, $A \sim B$.





O reformulare a Teoremei Cantor-Schröder-Bernstein este

Teorema 2.10

Relația $\leq$ este antisimetrică, adică pentru orice cardinale α, β avem:

$$\alpha \leq \beta \text{ și } \beta \leq \alpha \text{ implică } \alpha = \beta.$$

Dem.: Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$. Atunci

- ▶ $\alpha \leq \beta$ ddacă există o funcție injectivă $f : A \rightarrow B$.
- ▶ $\beta \leq \alpha$ ddacă există o funcție injectivă $g : B \rightarrow A$.
- ▶ $\alpha = \beta$ ddacă $A \sim B$.





Teorema 2.11

Relația $\leq$ este totală, adică pentru orice cardinale α, β avem că $\alpha \leq \beta$ sau $\beta \leq \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$. Definim

$$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A \text{ și } f : X \rightarrow B \text{ este funcție injectivă}\}.$$

Evident, $\mathcal{F}$ este nevidă. Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1} = f_1.$$

Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.



Afirmația 1: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g) . Deoarece $Y \subseteq A$ și $g : Y \rightarrow B$ este injectivă, avem că $|Y| \leq \alpha$ și $|Y| \leq \beta$. Dacă $Y = A$, atunci $\alpha = |A| = |Y| \leq \beta$.

Presupunem că $Y \neq A$. Distingem următoarele două cazuri:

- ▶ g este surjectivă. Atunci g este bijectivă, deci $|Y| = |B|$. Obținem că $\beta = |B| = |Y| \leq \alpha$.
- ▶ g nu este surjectivă. Atunci există $b \in B - g(Y)$. Deoarece $Y \neq A$, luăm $a \in A - Y$ și definim funcția $f : Y \cup \{a\} \rightarrow B$ astfel:

$$f|_Y = g \text{ și } f(a) = b.$$

Se observă ușor că $(Y \cup \{a\}, f) \in \mathcal{F}$ și $(Y, g) < (Y \cup \{a\}, f)$, ceea ce este o contradicție cu faptul că (Y, g) este element maximal al lui $\mathcal{F}$. □



Teorema 2.12

Relația $\leq$ este o relație de ordine totală.

Dem.: Exercițiu.

Rezultă ușor că

Corolar 2.13

Relația $<$ este o relație de ordine strictă.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.14

Pentru orice mulțime infinită A , $\aleph_0 \leq |A|$. Prin urmare, orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.

Dem.: Definim inductiv șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din A cu proprietatea că $a_i \neq a_j$ pentru orice $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$.

Deoarece A este nevidă, există $a_0 \in A$.

Cum A este infinită, $A - \{a_0\}$ este nevidă, deci există $a_1 \in A$ a.î. $a_1 \neq a_0$.

Cum A este infinită, $A - \{a_0, a_1\}$ este nevidă, deci există $a_2 \in A$ a.î. $a_2 \neq a_0$ și $a_2 \neq a_1$.

În general, presupunem că am definit $a_0, \dots, a_n \in A$ distincte două câte două. Cum A este infinită, $A - \{a_0, \dots, a_n\}$ este nevidă, deci există $a_{n+1} \in A$ diferit de toți $a_0, \dots, a_n$.



Cardinale - relația de ordine

Definind funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ prin $f(n) = a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că f este injectivă. Prin urmare, $\aleph_0 \leq |A|$.

Deoarece f este injectivă, avem că $f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$. Rezultă că $f(\mathbb{N})$ este o submulțime numărabilă a lui A . □

Propoziția 2.15

Fie α un cardinal finit și β un cardinal infinit. Atunci $\alpha < \beta$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.16

Fie A o mulțime infinită și $F \subseteq A$ o submulțime finită a sa. Atunci $|A - F| = |A|$.

Dem.: Exercițiu.



Definiția 2.17

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale, reprezentanții A și B fiind aleși a.î. $A \cap B = \emptyset$. Definim **suma cardinalelor** α și β prin

$$\alpha + \beta := |A \cup B|.$$

Observația 2.18

Observăm mai întâi că pentru orice cardinale α, β putem alege mulțimi A, B cu $|A| = \alpha, |B| = \beta$ și $A \cap B = \emptyset$. Într-adevăr, dacă $\alpha = |U|$ și $\beta = |V|$, atunci luăm $A = U \times \{1\}$ și $B = V \times \{2\}$.



Observația 2.19

Definiția operației $+$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$ cu $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Definim

$$f : A \cup B \rightarrow A' \cup B', \quad f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \in A \\ v(x) & \text{dacă } x \in B. \end{cases}$$

Se demonstrează ușor că f este bijectivă. Prin urmare,
 $\alpha + \beta = |A \cup B| = |A' \cup B'|.$





Propoziția 2.20

- (i) 0 este element neutru al lui $+$.
- (ii) Operația $+$ este comutativă și asociativă.
- (iii) Pentru orice cardinale α, β, γ ,

$$\beta \leq \gamma \text{ implică } \alpha + \beta \leq \alpha + \gamma.$$

În particular, $\alpha \leq \alpha + \gamma$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.21

Pentru orice cardinal infinit α , avem $\alpha + \alpha = \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Definim

$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid \emptyset \neq X \subseteq A \text{ și } f : X \times \{0, 1\} \rightarrow X \text{ este funcție bijectivă}\}.$

Afirmația 1: $\mathcal{F}$ este nevidă.

Dem.: Deoarece A este infinită, putem aplica Propoziția 2.14 pentru a obține o submulțime numărabilă $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a lui A . Definim

$$f : X \times \{0, 1\} \rightarrow X, \quad f(x_n, 0) = x_{2n}, \quad f(x_n, 1) = x_{2n+1}.$$

Se observă ușor că f este bijecție. Prin urmare, $(X, f) \in \mathcal{F}$. ■.

Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1 \times \{0,1\}} = f_1.$$



Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 2: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Demonstrație: Fie $\mathcal{G} = (X_i, f_i)_{i \in I}$ o submulțime total ordonată a lui $\mathcal{F}$. Fie $X := \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq A$. Definim $f : X \times \{0, 1\} \rightarrow X$ astfel:

dacă $x \in X$, alegem un $i \in I$ a.î. $x \in X_i$ și definim
$$f(x, t) = f_i(x, t) \text{ pentru orice } t \in \{0, 1\}.$$

Definiția lui f este corectă, deoarece pentru orice $i, j \in I, i \neq j$, dacă $x \in X_i \cap X_j$, atunci $f_i(x, t) = f_j(x, t)$. De asemenea, se observă ușor că $(X_i, f_i) \leq (X, f)$ pentru orice $i \in I$.

Rămâne să mai arătăm că f este bijectivă.

Demonstrăm că f este surjectivă. Fie $y \in X$ arbitrar. Atunci există $i \in I$ a.î. $y \in X_i$. Deoarece f_i este surjectivă, există $x \in X_i$, $t \in \{0, 1\}$ a.î. $f_i(x, t) = y$. Conform definiției lui f , rezultă că $f(x, t) = f_i(x, t) = y$.

Demonstrăm că f este injectivă. Fie $x, y \in X, s, t \in \{0, 1\}$ a.î. $f(x, s) = f(y, t)$. Atunci există $i, j \in I$ a.î. $x \in X_i$ și $y \in X_j$. Rezultă că $f(x, s) = f_i(x, s)$ și $f(y, t) = f_j(y, t)$, deci $f_i(x, s) = f_j(y, t)$. Deoarece $\mathcal{G}$ este total ordonată, avem următoarele două posibilități:

- ▶ $(X_i, f_i) \leq (X_j, f_j)$. Atunci $x \in X_i \subseteq X_j$ și $f_j|_{X_i \times \{0,1\}} = f_i$, deci $f_j(x, s) = f_i(x, s)$. Obținem că $f_j(x, s) = f_j(y, t)$. Deoarece f_j este injectivă, rezultă că $x = y$ și $s = t$.
 - ▶ $(X_j, f_j) \leq (X_i, f_i)$. Se demonstrează similar că $x = y$ și $s = t$.
- 

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g) . Așadar, $\emptyset \neq Y \subseteq A$ și $g : Y \times \{0, 1\} \rightarrow Y$ este bijecție, deci $|Y \times \{0, 1\}| = |Y|$.

Afirmația 3: $A - Y$ este finită.

Demonstrație: Presupunem că $A - Y$ este infinită. Din Propoziția 2.14, rezultă că $A - Y$ are o submulțime numărabilă C . Obținem, ca în demonstrația Afirmației 1, o bijecție $h : C \times \{0, 1\} \rightarrow C$. Definim

$$p : (Y \cup C) \times \{0, 1\} \rightarrow Y \cup C, \quad p(x, t) = \begin{cases} g(x, t) & \text{dacă } x \in Y \\ h(x, t) & \text{dacă } x \in C. \end{cases}$$

Deoarece g și h sunt bijecții, se arată ușor că p este, de asemenea, bijecție. Rezultă că $(Y \cup C, p) \in \mathcal{F}$ și $(Y, g) < (Y \cup C, p)$, ceea ce contrazice maximalitatea lui (Y, g) . Prin urmare, $A - Y$ este finită. ■



Suma cardinalelor

Aplicând Propoziția 2.16, avem că $|Y| = |A - (A - Y)| = |A| = \alpha$.
Obținem

$$\begin{aligned}\alpha &= |Y| = |Y \times \{0, 1\}| = |(Y \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})| \\ &= |Y \times \{0\}| + |Y \times \{1\}| = |Y| + |Y| = \alpha + \alpha. \quad \square\end{aligned}$$

Propoziția 2.22

Dacă α și β sunt cardinale cu α infinit și $\beta \leq \alpha$, atunci $\alpha + \beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.23

Fie α, β cardinale a.î. cel puțin unul dintre ele este infinit. Atunci $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dem.: Exercițiu.



Definiția 2.24

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale. Definim **produsul cardinalelor** α și β prin

$$\alpha \cdot \beta := |A \times B|.$$

Observația 2.25

Definiția operației $\cdot$ nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Definim

$$f : A \times B \rightarrow A' \times B', \quad f(a, b) = (u(a), v(b)).$$

Se demonstrează ușor că f este bijectivă. Prin urmare,
 $\alpha \cdot \beta = |A \times B| = |A' \times B'|.$





Propoziția 2.26

- (i) $\mathbf{0} \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ pentru orice cardinal α .
- (ii) $\mathbf{1}$ este element neutru al lui $\cdot$.
- (iii) Pentru orice cardinale α, β, γ ,
$$\beta \leq \gamma \text{ implică } \alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \gamma.$$
- (iv) Pentru orice cardinale α, β a.î. $\beta \neq \mathbf{0}$, $\alpha \leq \alpha \cdot \beta$.
- (v) Operația $\cdot$ este comutativă, asociativă și distributivă față de $+$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.27

Pentru orice cardinal infinit α , avem $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Definim

$$\mathcal{F} = \{(X, f) \mid X \subseteq A, X \text{ infinită și } f : X \rightarrow X \times X \text{ este funcție bijectivă}\}.$$

Afirmația 1: $\mathcal{F}$ este nevidă.

Demonstrație: Deoarece A este infinită, putem aplica Propoziția 2.14 pentru a obține o submulțime numărabilă $X \subseteq A$. Prin urmare, există o bijecție $g : X \rightarrow \mathbb{N}$. Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, există o bijecție $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Definim

$$h : X \times X \rightarrow X, \quad h(x, y) = (g^{-1} \circ f)(g(x), g(y)).$$

Se arată ușor că h este bijecție. Rezultă că $(X, h^{-1}) \in \mathcal{F}$. ■



Definim relația $\leq$ pe $\mathcal{F}$ astfel:

$$(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2) \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ și } f_2|_{X_1} = f_1.$$

Se observă ușor că $(\mathcal{F}, \leq)$ este o mulțime parțial ordonată.

Afirmația 2: $(\mathcal{F}, \leq)$ este inductiv ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Aplicând Lema lui Zorn, obținem că $\mathcal{F}$ are un element maximal (Y, g) . Fie $\beta := |Y|$. Cum Y este o submulțime infinită a lui A , avem că β este un cardinal infinit și $\beta \leq \alpha$. Deoarece $g : Y \rightarrow Y \times Y$ este bijecție, avem că

$$(*) \quad \beta = |Y| = |Y \times Y| = |Y| \cdot |Y| = \beta \cdot \beta.$$

Afirmația 3: $\beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Aplicăm acum $(*)$ pentru a concludă că $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.





Definim inductiv α^n pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ astfel:

$$\alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha.$$

Propoziția 2.28

Pentru orice cardinal infinit α și orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^n = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.29

Dacă α și β sunt cardinale cu α infinit și $0 \neq \beta \leq \alpha$, atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.30

Fie α, β cardinale nenule a.î. cel puțin unul dintre ele este infinit. Atunci $\alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dem.: Presupunem că α este infinit. Deoarece $\leq$ este totală, avem următoarele două cazuri:

- ▶ $\beta \leq \alpha$. Atunci $\max\{\alpha, \beta\} = \alpha$ și $\alpha \cdot \beta = \alpha$, conform Propoziției 2.29.
- ▶ $\alpha \leq \beta$. Atunci β este, de asemenea, infinit, $\max\{\alpha, \beta\} = \beta$ și $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = \beta$, conform Propoziției 2.29. □



Definiția 2.31

Fie $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ două cardinale. Definim

$$\alpha^\beta := |A^B| = |\text{Fun}(B, A)|.$$

Observația 2.32

Definiția lui α^β nu depinde de reprezentanți.

Dem.: Fie $\alpha = |A| = |A'|$, $\beta = |B| = |B'|$. Considerăm bijecțiile $u : A \rightarrow A'$ și $v : B \rightarrow B'$. Definim $\Phi : \text{Fun}(B, A) \rightarrow \text{Fun}(B', A')$ astfel:

pentru orice funcție $f : B \rightarrow A$, $\Phi(f) := u \circ f \circ v^{-1} : B' \rightarrow A'$.

Se demonstrează ușor că Φ este inversabilă, inversa sa fiind

$$\Psi : \text{Fun}(B', A') \rightarrow \text{Fun}(B, A), \quad \Psi(g) = u^{-1} \circ g \circ v$$

Prin urmare, $\alpha^\beta = |\text{Fun}(B, A)| = |\text{Fun}(B', A')|$.





Observația 2.33

- (i) Pentru orice cardinal α , $\mathbf{1}^\alpha = \mathbf{1}$, $\alpha^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$.
- (ii) Pentru orice cardinal nenul α , $\mathbf{0}^\alpha = \mathbf{0}$.

Dem.: Exercițiu.

Lema 2.34

Fie A, B, C mulțimi. Atunci

- (i) $\text{Fun}(A, \text{Fun}(B, C)) \sim \text{Fun}(A \times B, C)$.
- (ii) $\text{Fun}(A, B \times C) \sim \text{Fun}(A, B) \times \text{Fun}(A, C)$.
- (iii) Dacă în plus $A \cap B = \emptyset$, atunci
 $\text{Fun}(A \cup B, C) \sim \text{Fun}(A, C) \times \text{Fun}(B, C)$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.35

Fie α, β, γ cardinale arbitrare.

(i) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$, $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$ și $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

(ii) Dacă $\alpha \leq \beta$, atunci $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.36

Fie α un cardinal infinit și β un cardinal a.î. $2 \leq \beta \leq 2^\alpha$. Atunci $\beta^\alpha = 2^\alpha$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.37

Fie α un cardinal.

- (i) Pentru orice reprezentant A al lui α , are loc $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$.
- (ii) $\alpha < 2^\alpha$.

Dem.: Fie $\alpha = |A|$.

- (i) Avem că $2^\alpha = |\text{Fun}(A, \{0, 1\})|$. Definim

$$\Psi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \text{Fun}(A, \{0, 1\}), \quad \Psi(B) = \chi_B,$$

unde χ_B este funcția caracteristică a submulțimii B a lui A .

Se demonstrează ușor că Ψ este bijectivă.

- (ii) Deoarece funcția $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $f(a) = \{a\}$ este injectivă, avem că $\alpha \leq 2^\alpha$. Conform (S1.1), nu există funcții surjective cu domeniul A și codomeniul $\mathcal{P}(A)$. Rezultă că $\alpha \neq 2^\alpha$. Prin urmare, $\alpha < 2^\alpha$. □



Propoziția 2.38

Fie α un număr cardinal și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi a.î.
 $|A_i| \leq \alpha$ pentru orice $i \in I$. Atunci

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \alpha \cdot |I|.$$

Dem.: Fie $\alpha = |A|$. Pentru orice $i \in I$, deoarece $|A_i| \leq \alpha$, există o funcție injectivă $f_i : A_i \rightarrow A$.

Definim $f : \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow A \times I$ astfel:

dacă $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alegem $i_a \in I$ cu $a \in A_{i_a}$ și definim
 $f(a) = (f_{i_a}(a), i_a)$.

Rezultă ușor că f este injectivă: dacă $a, b \in \bigcup_{i \in I} A_i$ sunt a.î.

$(f_{i_a}(a), i_a) = (f_{i_b}(b), i_b)$, atunci $i_a = i_b$ și $f_{i_a}(a) = f_{i_b}(b)$. Rezultă că $f_{i_a}(a) = f_{i_a}(b)$, deci $a = b$, deoarece f_{i_a} este injectivă.

Prin urmare, $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq |A \times I| = \alpha \cdot |I|$.





Propoziția 2.39

Fie $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ două cardinale nenule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\alpha \leq \beta$.
- (ii) Există o funcție surjectivă $g : B \rightarrow A$.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii) Fie $f : A \rightarrow B$ injectivă. Fixăm $a_0 \in A$. Definim

$$g : B \rightarrow A, \quad g(b) = \begin{cases} a_0 & \text{dacă } b \in B - f(A) \\ a & \text{dacă } b \in f(A) \text{ și } a \text{ este unicul element} \\ & \text{din } A \text{ a.î. } f(a) = b. \end{cases}$$

Deoarece f este injectivă, g este bine definită. De asemenea, se observă imediat că g este surjectivă.



(ii) $\Rightarrow$ (i) Fie $g : B \rightarrow A$ surjectivă. Pentru fiecare $a \in A$, alegem un element $b_a \in B$ a.î. $g(b_a) = a$. Definim

$$f : A \rightarrow B, \quad f(a) = b_a.$$

Se arată ușor că f este injectivă: dacă $a_1, a_2 \in A$ a.î. $b_{a_1} = b_{a_2}$, atunci $a_1 = g(b_{a_1}) = g(b_{a_2}) = a_2$. Prin urmare, $\alpha \leq \beta$. □

Propoziția 2.40

Pentru orice mulțime infinită A , $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n| = |A|$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.41

Fie A o mulțime infinită și $\mathcal{P}_f(A)$ mulțimea tuturor submulțimilor finite ale lui A . Atunci $|\mathcal{P}_f(A)| = |A|$.

Dem.: Definim funcția $g : A \rightarrow \mathcal{P}_f(A)$, $g(a) = \{a\}$. Deoarece g este injectivă, rezultă că

$$|A| \leq |\mathcal{P}_f(A)|.$$

Prin urmare, $\mathcal{P}_f(A)$ este o mulțime infinită. Fie $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_f(A) - \{\emptyset\}$. Conform Propoziției 2.16, avem că $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}_f(A)|$.

Definim $h : \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n \rightarrow \mathcal{P}'$ astfel:

dacă $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ ($n \geq 1$), atunci $h(a) = A'$, unde A' este mulțimea obținută luând toți a_i diferiți.

Se observă ușor că h este surjectivă. Aplicând Propozițiile 2.39 și 2.40, rezultă că $|\mathcal{P}_f(A)| = |\mathcal{P}'| \leq \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n \right| = |A|$.

Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein. □

Propoziția 2.42

- (i) Dacă A este numărabilă, atunci A^k este numărabilă pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.
- (ii) Orice submulțime infinită a unei mulțimi numărabile este numărabilă.
- (iii) O reuniune cel mult numărabilă de mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.
- (iv) $\mathbb{Z}$ este numărabilă.
- (v) $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Dem.:

- (i) Avem că $|A| = \aleph_0$. Prin urmare, $|A^k| = \aleph_0^k = \aleph_0$, conform Propoziției 2.28.
- (ii) Fie B o mulțime numărabilă și $A \subseteq B$ o mulțime infinită. Atunci $|A| \leq |B| = \aleph_0$. Pe de altă parte, avem din Propoziția 2.14 că $\aleph_0 \leq |A|$. Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein.

- (iii) Fie I o mulțime cel mult numărabilă (deci $|I| \leq \aleph_0$) și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi cel mult numărabile. Rezultă că $|A_i| \leq \aleph_0$ pentru orice $i \in I$. Obținem

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| &\leq \aleph_0 \cdot |I| \quad \text{conform Propoziției 2.38} \\ &\leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 \quad \text{din Propoziția 2.26.(iii)} \\ &= \aleph_0 \quad \text{din Propoziția 2.27.} \end{aligned}$$

- (iv) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup A$, unde $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{-n\}$. Aplicăm (iii) de două ori pentru a obține că A este cel mult numărabilă și, apoi, că $\mathbb{Z}$ este cel cel mult numărabilă. Cum $\mathbb{Z}$ este infinită, avem că $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

- (v) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $A_n := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ și $f_n : \mathbb{Z} \rightarrow A_n$, $f_n(m) = \frac{m}{n}$. Este evident că f_n este bijectivă, deci A_n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, aplicăm (iii) și faptul că $\mathbb{Q}$ este infinită. □

Propoziția 2.43

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Dem.: Demonstrăm că $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ și apoi aplicăm Propoziția 2.37.(i). Definim următoarea funcție

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\chi_A(i)}{3^i}.$$

Demonstrăm că seria considerată mai sus este convergentă. Deoarece seria este cu termeni pozitivi, e suficient să arătăm că șirul sumelor parțiale $\left(\sum_{i=0}^n \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ este majorat. Observăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\sum_{i=0}^n \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq \sum_{i=0}^n \frac{2}{3^i} = 2 \sum_{i=0}^n \frac{1}{3^i} = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} < 3.$$

Așadar, Φ este bine definită.

Afirmația 1: Φ este injectivă.

Demonstrație: Presupunem că $A \neq B$ și demonstrăm că $\Phi(A) \neq \Phi(B)$. Deoarece A și B sunt diferite, există $l := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \chi_A(i) \neq \chi_B(i)\}$. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $\chi_A(l) = 0$ și $\chi_B(l) = 1$. Definim

$$a := \sum_{i=0}^{l-1} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \text{ dacă } l \neq 0 \quad \text{și} \quad a := 0 \text{ dacă } l = 0.$$

Pentru orice $n \geq l + 1$ avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{2\chi_A(i)}{3^i} &= a + \frac{2 \cdot 0}{3} + \sum_{i=l+1}^n \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq a + \frac{2}{3^{l+1}} \sum_{i=0}^{n-l-1} \frac{1}{3^i} \\ &= a + \frac{2}{3^{l+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-l}}{1 - \frac{1}{3}} < a + \frac{2}{3^{l+1}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = a + \frac{1}{3^l}. \end{aligned}$$



Rezultă că

$$\Phi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq a + \frac{1}{3^l}.$$

Pentru orice $n \geq l + 1$ avem

$$\sum_{i=0}^n \frac{2\chi_B(i)}{3^i} = a + \frac{2 \cdot 1}{3^l} + \sum_{i=l+1}^n \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq a + \frac{2}{3^l}.$$

Așadar,

$$\Phi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq a + \frac{2}{3^l} > a + \frac{1}{3^l}.$$

Obținem astfel că $\Phi(A) < \Phi(B)$, deci $\Phi(A) \neq \Phi(B)$. ■

Cum Φ este injectivă, avem că

$$(*) \quad |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq \mathfrak{c}.$$



Deoarece $\mathbb{Q}$ este numărabilă, există o bijecție $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Definim funcția

$$\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \Psi(r) = \{n \in \mathbb{N} \mid j(n) \leq r\}.$$

Afirmația 2: Ψ este injectivă.

Demonstrație: Fie $r_1 \neq r_2$ două numere reale. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $r_1 < r_2$. Deoarece $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$, există $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $r_1 < q < r_2$. Cum j este bijectivă, există $m \in \mathbb{N}$ a.î. $j(m) = q$. Rezultă că $m \in \Psi(r_2)$ și $m \notin \Psi(r_1)$, demonstrând astfel că $\Psi(r_1) \neq \Psi(r_2)$. ■

Prin urmare,

$$(**) \quad \mathfrak{c} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

Aplicăm Teorema Cantor-Schröder-Bernstein pentru a obține, din (*) și (**), că $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. □



Propoziția 2.44

$\mathbb{R}$ nu este numărabilă.

Dem.: Aplicând Propozițiile 2.43 și 2.37.(ii), obținem că $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, deci $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$. □

Lema 2.45

Pentru orice numere reale $a < b$, $c < d$, $|(a, b)| = |(c, d)|$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.46

Pentru orice numere reale $a < b$,

$$|(a, b)| = |[a, b]| = |(a, b]| = |[a, b)| = \mathfrak{c}.$$

Dem.: Exercițiu.



LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**, despre care se poate argumenta în principiu că sunt **adevărate** sau **false**.

Propoziții declarative

- ▶ Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- ▶ Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- ▶ Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- ▶ Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- ▶ Andrei este deștept.
- ▶ Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- ▶ Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- ▶ Pleacă!

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm

$p, q, r, \dots$ sau $p_1, p_2, p_3, \dots$

Exemple: p =Numărul 2 este par. q =Mâine plouă. r =Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate $\varphi, \psi, \chi, \dots$) folosind conectorii logici $\neg$ (negația), $\rightarrow$ (implicația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\leftrightarrow$ (echivalența).

Exemple:

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.

$p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.

$p \rightarrow q$ = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.

$p \leftrightarrow q$ = Numărul 2 este par **dacă și numai dacă** mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).

Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$



Exemplu:

Fie propoziția:

φ = *Dacă este frig afară, trebuie să îmi iau paltonul.*

Considerăm propozițiile atomice

p = *Este frig afară.* q = *Trebuie să îmi iau paltonul.*

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ = *Este frig afară și nu trebuie să îmi iau paltonul.*



Exemplu:

Fie propoziția:

φ = *Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

p = *Trenul întârzie.*

q = *Sunt taxiuri la gară.*

r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q ? **q este adevărată.**



Definiția 3.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de *variabile*;
 - ▶ conectori logici: $\neg$ (se citește *non*), $\rightarrow$ (se citește *implică*)
 - ▶ paranteze: $(,)$.
- Mulțimea *Sim* a *simbolurilor* lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \dots$



Definiția 3.2

Mulțimea *Expr* a *expresiilor* lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ . Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui LP de lungime n .
- ▶ Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$.

Propoziția 3.3

Mulțimea *Expr* a expresiilor lui LP este numărabilă.

Dem.: Exercițiu.



Definiția 3.4

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in \text{Sim}$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește (i, j) -**subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j) -subexpresia lui θ .

Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 3.5

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Notății: Mulțimea formulelor se notează **Form**. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \dots$

- ▶ Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- ▶ $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".



Exemple:

- ▶ $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- ▶ $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.



Propoziția 3.6

Mulțimea Form a formulelor lui LP este numărabilă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 3.7 (Principiul inducției pe formule)

Fie P o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea P .*
- (1) Pentru orice formulă φ , dacă φ are proprietatea P , atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea P .*
- (2) Pentru orice formule φ, ψ , dacă φ și ψ au proprietatea P , atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea P .*

Atunci orice formulă φ are proprietatea P .



Fie φ o formulă a lui LP .

Notăție:

Năm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ .

Definiția 3.8

O **subformulă** a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ .

Notăție: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \rightarrow v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

Conectorii derivați $\vee$ (se citește **sau**), $\wedge$ (se citește **și**), $\leftrightarrow$ (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$(\varphi \vee \psi) \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \quad := \quad (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
 - $\neg$ are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
 - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.



Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$. Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := (((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$

$$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n := (((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- ▶ $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.
- ▶ $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.



Principiul recursiei pe formule

Propoziția 3.9 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_{\neg} : A \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Form} \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

- (R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.
- (R1) $F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ .
- (R2) $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ .

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da **definiții recursive** ale diverselor funcții asociate formulelor.



SEMANTICA LP

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr:

1 pentru **adevărat** și **0** pentru **fals**. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0, 1\}$ folosind **tabelele de adevăr**.

$$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$$\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$.



Operațiile $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ și $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0, 1\}$, $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Dem.: Exercițiu.



Definiția 3.10

O *evaluare* (sau *interpretare*) este o funcție $e : V \rightarrow \{0, 1\}$.

Teorema 3.11

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ există o unică funcție

$$e^+ : \text{Form} \rightarrow \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- ▶ $e^+(v) = e(v)$ pentru orice $v \in V$.
- ▶ $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \text{Form}$,
- ▶ $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in \text{Form}$.

Dem.: Aplicăm Principiul Recursiei pe formule (Propoziția 3.9) cu $A = \{0, 1\}$, $G_0 = e$, $G_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_{\neg}(p) = \neg p$ și $G_{\rightarrow} : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_{\rightarrow}(p, q) = p \rightarrow q$. □



Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare.

Propoziția 3.12

Pentru orice formule φ, ψ ,

$$\begin{aligned}e^+(\varphi \vee \psi) &= e^+(\varphi) \vee e^+(\psi), \\e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi), \\e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi).\end{aligned}$$

Propoziția 3.13

Pentru orice $n \geq 2$ și orice formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$,

- ▶ $e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **orice** $i \in \{1, \dots, n\}$.
- ▶ $e^+(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = 1$ ddacă există $i \in \{1, \dots, n\}$ a.î $e^+(\varphi_i) = 1$.



Propoziția 3.14

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Prin urmare, evaluarea unei formule depinde doar de evaluările variabilelor care apar în formulă.



Fie φ o formulă.

Definiția 3.15

- ▶ O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. **Notăție:** $e \models \varphi$.
- ▶ φ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- ▶ Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.
- ▶ φ este **tautologie** dacă orice evaluare este model al lui φ .
Notăție: $\models \varphi$.

Notăție: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziția 3.16

- (i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.
- (ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Definiția 3.17

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- ▶ φ este **consecință semantică** a lui ψ dacă $\text{Mod}(\psi) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$. **Notăție:** $\psi \models \varphi$.
- ▶ φ și ψ sunt **(logic) echivalente** dacă $\text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi)$.
Notăție: $\varphi \sim \psi$.

Observație

Relația $\sim$ este o relație de echivalență pe mulțimea Form a formulelor lui LP .

Propoziția 3.18

Fie φ, ψ formule. Atunci

- (i) $\psi \models \varphi$ ddacă $\models \psi \rightarrow \varphi$.
- (ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \psi \leftrightarrow \varphi$.



Exemplu:

Fie

$$\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

$$\text{Var}(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

v_1	v_2	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)$	φ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1



Propoziția 3.19

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus $\models \varphi \vee \neg \varphi$ (1)

modus ponens $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi$ (2)

afirmarea concluziei $\psi \models \varphi \rightarrow \psi$ (3)

contradicția $\models \neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$ (4)

dubla negație $\varphi \sim \neg \neg \varphi$ (5)

contrapозиția $\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$ (6)

negarea premisei $\neg \varphi \models \varphi \rightarrow \psi$ (7)

modus tollens $\neg \psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \neg \varphi$ (8)

tranzitivitatea implicației $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$ (9)



Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

legile lui de Morgan $\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$ (10)

$$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)) \quad (11)$$

exportarea și importarea $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ (12)

idempotența $\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$ (13)

slăbirea $\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ (14)

comutativitatea $\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$ (15)

asociativitatea $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ (16)

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi \quad (17)$$

absorbția $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$ (18)

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi \quad (19)$$

distributivitatea $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ (20)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad (21)$$



Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \quad (29)$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg \varphi \rightarrow \psi) \quad (31)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (32)$$

$$\models \neg \varphi \rightarrow (\neg \psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \quad (33)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \quad (34)$$

Dem.: Exercițiu.

Demonstrăm (1): $\models \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$. Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- ▶ $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- ▶ $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.



Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 3.20

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).

Notăție: $e \models \Gamma$.

- Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

Notății: Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.

Notăm $Mod(\varphi)$ în loc de $Mod(\{\varphi\})$ și $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

- $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$.



Mulțimi de formule

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 3.21

O formulă φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă

$\text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$. **Notăție:** $\Gamma \models \varphi$.

Dacă φ **nu** este consecință semantică a lui Γ , scriem $\Gamma \not\models \varphi$.

Definiția 3.22

- ▶ Δ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $\text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\Delta)$.

Notăție: $\Gamma \models \Delta$.

- ▶ Γ și Δ sunt **(logic) echivalente** dacă $\text{Mod}(\Gamma) = \text{Mod}(\Delta)$.

Notăție: $\Gamma \sim \Delta$.

Observație

- ▶ $\psi \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \{\varphi\}$.

- ▶ $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.



SINTAXA LP

Folosim un **sistem deductiv** de tip Hilbert pentru LP .

Axiomele logice

Mulțimea Axm a **axiomelor** lui LP constă din toate formulele de forma:

$$(A1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(A2) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(A3) \quad (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi),$$

unde φ , ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ ,

din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (**modus ponens** sau **(MP)**):

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}.$$



Fie Γ o mulțime de formule. Definiția Γ -teoremelor este un nou exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 3.23

Γ -teoremele sunt formulele lui LP definite astfel:

- (T0) Orice axiomă este Γ -teoremă.*
- (T1) Orice formulă din Γ este Γ -teoremă.*
- (T2) Dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ sunt Γ -teoreme, atunci ψ este Γ -teoremă.*
- (T3) Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ -teoreme.*

Dacă φ este Γ -teoremă, atunci spunem și că φ este **dedusă din ipotezele Γ** .

Notății

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ -teoremelor	Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ este Γ -teoremă	$\vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	$:\Leftrightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.			

Definiția 3.24

O formulă φ se numește **teoremă** a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația $\vdash$, obținem

Propoziția 3.25

- (i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.



Definiția Γ -teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin inducție după Γ -teoreme.

Propoziția 3.26 (Inducție după Γ -teoreme)

Fie Δ o mulțime de o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- (i) $Axm \subseteq \Delta$;
 - (ii) $\Gamma \subseteq \Delta$;
 - (iii) dacă $\varphi \in \Delta$ și $\varphi \rightarrow \psi \in \Delta$, atunci $\psi \in \Delta$.
- Atunci $Thm(\Gamma) \subseteq \Delta$.

Definiția 3.27

O Γ -demonstrație (*demonstrație din ipotezele Γ*) este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$.

O $\emptyset$ -demonstrație se va numi simplu *demonstrație*.

Definiția 3.28

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau *demonstrație a lui φ din ipotezele Γ* este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește *lungimea* Γ -demonstrației.



Propoziția 3.29

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ dacă există o Γ -demonstrație a lui φ .

Teorema 3.30 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \subseteq \text{Form}$ și $\varphi, \psi \in \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ dacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Propoziția 3.31

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ , $\Gamma \vdash \varphi$ dacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.



Propoziția 3.32

Pentru orice formule φ, ψ ,

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\vdash \psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

$$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$$

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$$

$$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$$

$$\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$



Propoziția 3.33

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$$

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$$

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$



SINTAXA și SEMANTICA

Teorema 3.34 (Teorema de corectitudine (Soundness Theorem))

Orice Γ -teoremă este consecință semantică a lui Γ , adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

pentru orice $\varphi \in \text{Form}$ și $\Gamma \subseteq \text{Form}$.

Dem.: Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in \text{Form} \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $\text{Thm}(\Gamma) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după Γ -teoreme.

- ▶ Axiomele sunt în Σ (**exercițiu**).
- ▶ Evident, $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- ▶ Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens.
Presupunem că $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
Rezultă ușor că $\Gamma \models \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$. □



Teorema 3.35 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ ,

$$\vdash \varphi \quad \text{dacă} \quad \models \varphi.$$

Prin urmare, tautologiile coincid cu teoremele.

Teorema 3.36 (Teorema de completitudine tare)

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

Mai general, Γ -teoremele coincid cu consecințele semantice ale lui Γ .



LOGICA DE ORDINUL I

Definiția 4.1

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
 - ▶ conectorii $\neg$ și $\rightarrow$;
 - ▶ paranteze: $(,)$;
 - ▶ simbolul de egalitate $=$;
 - ▶ cuantificatorul universal $\forall$;
 - ▶ o mulțime $\mathcal{R}$ de simboluri de relații;
 - ▶ o mulțime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcții;
 - ▶ o mulțime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;
 - ▶ o funcție *aritate* $\text{ari} : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.
- ▶ $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{ari})$.
- ▶ τ se numește **signatura** lui $\mathcal{L}$ sau **vocabularul** lui $\mathcal{L}$ sau **alfabetul** lui $\mathcal{L}$ sau **tipul de similaritate** al lui $\mathcal{L}$

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea $\text{Sim}_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui $\mathcal{L}$ este

$$\text{Sim}_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc simboluri ne-logice.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc simboluri logice.
- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \dots$, simbolurile de relații cu $P, Q, R, \dots$, simbolurile de funcții cu $f, g, h, \dots$ și simbolurile de constante cu $c, d, e, \dots$
- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:
 $\mathcal{F}_m$:= mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m ;
 $\mathcal{R}_m$:= mulțimea simbolurilor de relații de aritate m .

Definiția 4.2

Mulțimea $\text{Expr}_{\mathcal{L}}$ a **expresiilor** lui $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ .

Definiția 4.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$, unde $\theta_i \in \text{Sim}_{\mathcal{L}}$ pentru orice i .

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k - 1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește (i, j) -**subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k - 1$ a.î. ψ este (i, j) -subexpresia lui θ ;

Notăm cu $\text{Var}(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ .



Definiția 4.4

Termenii lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:

- (T0) Orice variabilă este termen.
 - (T1) Orice simbol de constantă este termen.
 - (T2) Dacă $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni, atunci $ft_1 \dots t_m$ este termen.
 - (T3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt termeni.
- ▶ Mulțimea termenilor se notează $\text{Term}_{\mathcal{L}}$.
 - ▶ Termeni: $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \dots$

Definiția 4.5

Un termen t se numește *închis* dacă $\text{Var}(t) = \emptyset$.



Definiție alternativă

Mulțimea $Term_{\mathcal{L}}$ a termenilor lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- ▶ orice variabilă este element al lui Γ ;
- ▶ orice simbol de constantă este element al lui Γ ;
- ▶ dacă $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.



Citire unică (Unique readability)

Dacă t este un termen, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $t = v$, unde $v \in V$;
- ▶ $t = c$, unde $c \in \mathcal{C}$;
- ▶ $t = ft_1 \dots t_m$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni ai lui $\mathcal{L}$.

Mai mult, scrierea lui t sub una din aceste forme este unică.

- ▶ demonstrații tehnice: [Monk, Mathematical Logic](#), Springer, 1976



Propoziția 4.6 (Principiul inducției pe termeni)

Fie Γ o mulțime de termeni care are următoarele proprietăți:

- ▶ *Γ conține variabilele și simbolurile de constante;*
- ▶ *dacă $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.*

Atunci $\Gamma = \text{Term}_{\mathcal{L}}$.

Inducția pe termeni este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate ***P***: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor termenilor care satisfac ***P*** și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $\Gamma = \text{Term}_{\mathcal{L}}$.



Propoziția 4.7 (Principiul recursiei pe termeni)

Fie D o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \cup \mathcal{C} \rightarrow D,$$

$$G_f : D^m \times \text{Term}_{\mathcal{L}}^m \rightarrow D \text{ pentru orice } m \in \mathbb{N}^*, f \in \mathcal{F}_m.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Term}_{\mathcal{L}} \rightarrow D$$

care satisface următoarele proprietăți:

- (i) $F(t) = G_0(t)$ pentru orice $t \in V \cup \mathcal{C}$.*
- (ii) $F(ft_1 \dots t_m) = G_f(F(t_1), F(t_2), \dots, F(t_m), t_1, \dots, t_m)$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*, f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni ai lui $\mathcal{L}$.*



Definiția 4.8

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- ▶ $(s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $(Rt_1 \dots t_m)$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni.

Notăție

Mulțimea formulelor atomice se notează $\text{AtomicForm}_{\mathcal{L}}$.



Definiția 4.9

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:

- (F0) Orice formulă atomică este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F3) Dacă φ este formulă, atunci $(\forall x\varphi)$ este formulă pentru orice variabilă x .
- (F4) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.

Notății

- ▶ Mulțimea formulelor se notează $Form_{\mathcal{L}}$.
- ▶ Formule: $\varphi, \psi, \chi, \dots$



Definiție alternativă

Mulțimea $Form_{\mathcal{L}}$ a **formulelor** lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- ▶ orice formulă atomică este element al lui Γ ;
- ▶ Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\rightarrow$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\forall x$ (pentru orice variabilă x), adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\forall x\varphi) \in \Gamma$ pentru orice variabilă x .



Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = (s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $\varphi = (Rt_1 \dots t_m)$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule;
- ▶ $\varphi = (\forall x\psi)$, unde x este variabilă și ψ este formulă.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

- ▶ demonstrații tehnice: [Monk, Mathematical Logic](#), Springer, 1976



Propoziția 4.10 (Principiul inducției pe formule)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶ Γ conține toate formulele atomice;*
- ▶ Γ este închisă la $\neg, \rightarrow$ și $\forall x$ (pentru orice variabilă x).*

Atunci $\Gamma = \text{Form}_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate **P**: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac **P** și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $\Gamma = \text{Form}_{\mathcal{L}}$.

Propoziția 4.11 (Principiul recursiei pe formule)

Fie D o mulțime și funcțiile

$$G_{\neg} : D \times \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow D, \quad G_{\rightarrow} : D^2 \times \text{Form}_{\mathcal{L}}^2 \rightarrow D, \\ G_0 : \text{AtomicForm}_{\mathcal{L}} \rightarrow D, \quad G_{\forall} : D \times V \times \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow D.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow D$$

care satisface următoarele proprietăți:

- (i) $F(\varphi) = G_0(\varphi)$ pentru orice formulă atomică φ .*
- (ii) $F((\neg\varphi)) = G_{\neg}(F(\varphi), \varphi)$ pentru orice formulă φ .*
- (iii) $F((\varphi \rightarrow \psi)) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi), \varphi, \psi)$ pentru orice formule φ, ψ .*
- (iv) $F((\forall x\varphi)) = G_{\forall}(F(\varphi), x, \varphi)$ pentru orice formulă φ și orice variabilă x .*



Conectori derivați

Conectorii $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ și **cuantificatorul existențial** $\exists$ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$\varphi \vee \psi \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$\varphi \wedge \psi \quad := \quad \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$$

$$\exists x\varphi \quad := \quad (\neg\forall x(\neg\varphi)).$$



Notății

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$

$$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- ▶ $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.
- ▶ $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.



În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $s = t$, $Rt_1 \dots t_m$, $\forall x\varphi$, $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$. Pe de altă parte, scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.

Pentru a reduce din folosirea parantezelor, presupunem următoarele:

- ▶ Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ au precedență mai mare decât ceilalți conectori. Așadar, $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ este $(\forall x\varphi) \rightarrow \psi$ și nu $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.
- ▶ $\neg$ are precedență mai mare decât $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$.
- ▶ $\wedge$, $\vee$ au precedență mai mare decât $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.



- ▶ Scriem uneori $f(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $ft_1 \dots t_m$ și $R(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \dots t_m$.
- ▶ Simbolurile de funcții sau relații de aritate 1 se numesc **unare**.
- ▶ Simbolurile de funcții sau relații de aritate 2 se numesc **binare**.
- ▶ Dacă f este un simbol de funcție binară scriem t_1ft_2 în loc de ft_1t_2 .
- ▶ Analog, dacă R este un simbol de relație binară, scriem t_1Rt_2 în loc de Rt_1t_2 .

Vom identifica un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și vom scrie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

Definiția 4.12

O $\mathcal{L}$ -**structură** este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- ▶ A este o mulțime nevidă;
- ▶ $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A ; dacă f are aritatea m , atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \rightarrow A$;
- ▶ $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A ; dacă R are aritatea m , atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;
- ▶ $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.
- ▶ A se numește **universul** structurii $\mathcal{A}$. **Notăție:** $A = |\mathcal{A}|$
- ▶ $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește **denotația** sau **interpretarea** lui f (respectiv R , c) în $\mathcal{A}$.



Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

$$\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset.$$

$\mathcal{L}_=$ -structurile sunt mulțimile nevide.

Acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$



Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$; $\dot{<}$ este simbol de relație binar, adică are aritatea 2;
- ▶ $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare și $\dot{S}$ este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- ▶ $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$ -structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <, \quad \dot{+}^{\mathcal{N}} = +, \quad \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot, \quad \dot{S}^{\mathcal{N}} = S, \quad \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$ -structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.



Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar;
- ▶ $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$.

$\mathcal{L}_R$ -structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară.

- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\leq$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $<$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- ▶ Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul E în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- ▶ Dacă suntem interesați de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\in$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.



Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \emptyset$;
- ▶ $\mathcal{F} = \{\ast, \dot{-}^1\}$; $\ast$ simbol binar, $\dot{-}^1$ simbol unar;
- ▶ $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \ast, \dot{-}^1; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\ast, \dot{-}^1, \dot{e})$.

Exemple naturale de $\mathcal{L}_{Gr}$ -structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, {}^{-1}, e)$.

Prin urmare, $\ast^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{-}^1{}^{\mathcal{G}} = {}^{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \emptyset$;
- ▶ $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- ▶ $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.



SEMANTICA



Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură.

Definiția 4.13

O *interpretare* sau *evaluare* a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \rightarrow A$.

În continuare, $e : V \rightarrow A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 4.14 (Interpretarea termenilor)

Prin recursie pe termeni se definește *interpretarea* $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e :

- ▶ dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;
- ▶ dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;
- ▶ dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.



Exemplu

Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ și $\mathcal{L}_{ar}$ -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$ și

$$t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y).$$

Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$.

Dem.: Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\ &= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\ &= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))). \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$



Prin recursie pe formule se definește **interpretarea**

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a formulei φ sub evaluarea e .

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } (t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$



Negația și implicația

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$\rightarrow: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$,

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \begin{aligned} &\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e). \end{aligned}$



Notăție

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretare $e_{x \mapsto a} : V \rightarrow A$ prin

$$e_{x \mapsto a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^A(e_{x \mapsto a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 4.15

Fie φ o formulă. Spunem că:

- ▶ e **satisface** φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$.
Notăție: $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- ▶ e **nu satisface** φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
Notăție: $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- ▶ $(\mathcal{A}, e)$ este **model** al lui φ dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Definiția 4.16

Fie φ o formulă. Spunem că:

- ▶ φ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- ▶ φ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie** dacă φ nu este satisfiabilă.



Corolar 4.17

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $\mathcal{A} \models (\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ implică } \mathcal{A} \models \psi[e]$
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$.
- (iv) $\mathcal{A} \not\models (\forall x\varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\models \varphi[e_{x \mapsto a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 4.18

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$.
- (ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$.
- (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$.
- (iv) $(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

$\vee, \wedge, \leftrightarrow: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$,

p	q	$p \vee q$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1



Propoziția 4.19

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (iii) $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (iv) $\mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}].$
- (v) $\mathcal{A} \not\models (\exists x \varphi)[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \not\models \varphi[e_{x \mapsto a}].$

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] &\iff \mathcal{A} \models (\neg \forall x \neg \varphi)[e] \iff \mathcal{A} \not\models (\forall x \neg \varphi)[e] \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\models (\neg \varphi)[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]. \end{aligned}$$



Propoziția 4.20

Pentru orice $n \geq 2$ și orice formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$,

- ▶ $\mathcal{A} \models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)[e]$ ddacă $\mathcal{A} \models \varphi_i[e]$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$.
- ▶ $\mathcal{A} \models (\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n)[e]$ ddacă există $i \in \{1, \dots, n\}$ a.î $\mathcal{A} \models \varphi_i[e]$.

Dem.: Exercițiu.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 4.21

Spunem că φ este **adevărată** într-o $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ **satisfacă** φ sau că $\mathcal{A}$ este un **model** al lui φ .

Notăție: $\mathcal{A} \models \varphi$

Definiția 4.22

Spunem că φ este formulă **universal adevărată** sau (**logic**) **validă** dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

Notăție: $\models \varphi$

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 4.23

φ și ψ sunt **logic echivalente** dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție: $\varphi \models \psi$

Definiția 4.24

ψ este **consecință semantică** a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \implies \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție: $\varphi \models \psi$

Observație

- (i) $\varphi \models \psi$ ddacă $\models \varphi \rightarrow \psi$.
- (ii) $\varphi \models \psi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \psi \leftrightarrow \varphi$.



Exemple

Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ și

$$\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \rightarrow (x \dot{<} y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \rightarrow (\dot{<}(x, y) \vee x = y).$$

Pentru orice $\mathcal{L}_{ar}$ -structură $\mathcal{A} = (A, \dot{<}^{\mathcal{A}}, \dot{+}^{\mathcal{A}}, \dot{\times}^{\mathcal{A}}, \dot{S}^{\mathcal{A}}, \dot{0}^{\mathcal{A}})$, și orice interpretare $e : V \rightarrow A$, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{A} \not\models (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff (e(x), \dot{S}^{\mathcal{A}}(e(y))) \notin \dot{<}^{\mathcal{A}} \text{ sau } \\ &\quad \mathcal{A} \models (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models (x = y)[e] \\ &\iff (e(x), \dot{S}^{\mathcal{A}}(e(y))) \notin \dot{<}^{\mathcal{A}} \\ &\quad \text{sau } (e(x), e(y)) \in \dot{<}^{\mathcal{A}} \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff (\text{nu este adevărat că } e(x) \dot{<}^{\mathcal{A}} \dot{S}^{\mathcal{A}}(e(y))) \\ &\quad \text{sau } e(x) \dot{<}^{\mathcal{A}} e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$



Exemple

Fie $\mathcal{L}_{ar}$ -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Să se arate că $\mathcal{N} \models \varphi$.

Dem.: Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned}\mathcal{N} \models \varphi[e] &\iff \left(\text{nu este adevărat că } e(x) \dot{<}^{\mathcal{N}} S^{\mathcal{N}}(e(y)) \right) \\ &\quad \text{sau } e(x) \dot{<}^{\mathcal{N}} e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff \left(\text{nu este adevărat că } e(x) < S(e(y)) \right) \\ &\quad \text{sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff \left(\text{nu este adevărat că } e(x) < e(y) + 1 \right) \\ &\quad \text{sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y),\end{aligned}$$

ceea ce este adevărat. Prin urmare, $\mathcal{N} \models \varphi[e]$ pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, adică $\mathcal{N} \models \varphi$.



Exemple

Fie $\mathcal{L}_{ar}$ -structura $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot, S, 0)$, unde

$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, S(x) = x + 1$.

Să se arate că $\mathcal{R} \not\models \varphi$.

Dem.: Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{R}$, avem

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \models \varphi[e] &\iff \left(\text{nu este adevărat că } e(x) \dot{<}^{\mathcal{R}} S^{\mathcal{R}}(e(y)) \right) \\ &\quad \text{sau } e(x) \dot{<}^{\mathcal{R}} e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff \left(\text{nu este adevărat că } e(x) < S(e(y)) \right) \\ &\quad \text{sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff \left(\text{nu este adevărat că } e(x) < e(y) + 1 \right) \\ &\quad \text{sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y).\end{aligned}$$

Fie $e : V \rightarrow \mathbb{R}$ a.î. $e(x) = 1,5$ și $e(y) = 1,4$. Atunci $\mathcal{R} \not\models \varphi[e]$.

Prin urmare, $\mathcal{R} \not\models \varphi$.

Propoziția 4.25

Pentru orice termeni s, t, u ,

- (i) $\models t = t$;
- (ii) $\models s = t \rightarrow t = s$;
- (iii) $\models s = t \wedge t = u \rightarrow s = u$.

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iii). Notăm, pentru simplitate,

$$\varphi := s = t \wedge t = u \rightarrow s = u.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$. Trebuie să arătăm că $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.
Obținem

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{A} \models (s = t \wedge t = u)[e] \text{ implică } \mathcal{A} \models (s = u)[e] \\ &\iff (\mathcal{A} \models (s = t)[e] \text{ și } \mathcal{A} \models (t = u)[e]) \text{ implică } \mathcal{A} \models (s = u)[e] \\ &\iff (s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \text{ și } t^{\mathcal{A}}(e) = u^{\mathcal{A}}(e)) \text{ implică } s^{\mathcal{A}}(e) = u^{\mathcal{A}}(e),\end{aligned}$$

ceea ce este evident.



Propoziția 4.26

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y ,

$$\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi \quad (35)$$

$$\neg \forall x \varphi \models \exists x \neg \varphi \quad (36)$$

$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \quad (37)$$

$$\exists x (\varphi \vee \psi) \models \exists x \varphi \vee \exists x \psi \quad (38)$$

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$.

(35):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\neg \exists x \varphi)[e] &\iff \mathcal{A} \not\models (\exists x \varphi)[e] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \not\models \varphi[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models (\neg \varphi)[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \mathcal{A} \models (\forall x \neg \varphi)[e]. \end{aligned}$$



(37):

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff (\text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]) \\ &\quad \text{și } (\text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}]) \\ &\iff \mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e] \text{ și } \mathcal{A} \models (\forall x \psi)[e] \\ &\iff \mathcal{A} \models (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)[e].\end{aligned}$$

(36), (38): Exercițiu.





Propoziția 4.27

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y ,

$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \models \forall x(\varphi \vee \psi) \quad (39)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \quad (40)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (41)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (42)$$

$$\forall x\varphi \models \exists x\varphi \quad (43)$$

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (44)$$

$$\forall x\varphi \models \varphi \quad (45)$$

Dem.: Exercițiu. Demonstrăm (41) ca exemplu. Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$.

Avem că $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$,

$\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x \mapsto a}] \iff$ pentru orice $a \in A$,

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \iff$$

$$(*) \quad \text{pentru orice } a \in A, \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}).$$

Similar obținem că $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e] \iff$

$$(**) \quad (\forall x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) \leq (\forall x\psi)^{\mathcal{A}}(e).$$

Presupunem (*) și trebuie să demonstrăm (**).

Dacă $(\forall x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0$, (**) este evident.

Presupunem, așadar, că $(\forall x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică

$$(***) \quad \text{pentru orice } b \in A, \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto b}) = 1.$$

Ne rămâne de arătat că $(\forall x\psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică

$$\text{pentru orice } c \in A, \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto c}) = 1.$$

Fie $c \in A$. Din (*), avem că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto c}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto c})$, iar din (***),
că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto c}) = 1$. Rezultă că $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto c}) = 1$. □



Notății 4.28

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$. Pentru orice variabile distincte x, y și orice elemente $a, b \in A$, avem că

$$(e_{y \mapsto b})_{x \mapsto a} = (e_{x \mapsto a})_{y \mapsto b}.$$

Notăm valoarea comună $e_{x \mapsto a, y \mapsto b}$. Prin urmare,

$$e_{x \mapsto a, y \mapsto b} : V \rightarrow A, \quad e_{x \mapsto a, y \mapsto b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ și } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$



Propoziția 4.29

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile distincte x, y ,

$$\forall x \forall y \varphi \models \forall y \forall x \varphi \quad (46)$$

$$\exists x \exists y \varphi \models \exists y \exists x \varphi \quad (47)$$

$$\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi \quad (48)$$

Dem.: Exercițiu. Demonstrăm (48) ca exemplu. Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$. Avem că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] &\iff \text{există } b \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e_{y \mapsto b}] \\ &\iff \text{există } b \in A \text{ a.î. pentru orice } a \in A, \\ &\quad \mathcal{A} \models \varphi[(e_{y \mapsto b})_{x \mapsto a}]. \end{aligned}$$



Deci, $\mathcal{A} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] \iff (*)$, unde

(*) există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a, y \mapsto b}]$.

Obținem similar că $\mathcal{A} \models (\forall x \exists y \varphi)[e] \iff (**)$, unde

(**) pentru orice $a \in A$ există $c \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a, y \mapsto c}]$.

(*) $\Rightarrow$ (**) Fie b a.î. (*) are loc. Pentru orice $a \in A$ luăm $c := b$.
Atunci (**) are loc. □



Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I și de formulă φ a lui $\mathcal{L}$ astfel încât $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$, unde x și y sunt variabile distincte.

Dem.: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\cdot}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$ -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară.
Fie

$$\varphi := x \dot{<} y.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\forall x \exists y \varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î.} \\ &\quad \mathcal{N} \models \varphi [e_{x \mapsto n, y \mapsto m}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat (se ia, de pildă, $m := n + 1$). Așadar,

$$\mathcal{N} \models (\forall x \exists y \varphi)[e].$$



Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul 1 și de formulă φ a lui $\mathcal{L}$ astfel încât $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$.

Dem.: (continuare) Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ &\quad \text{avem } \mathcal{N} \models \varphi[e_{x \mapsto n, y \mapsto m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ &\quad \text{avem } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este fals. Așadar,

$$\mathcal{N} \not\models (\exists y \forall x \varphi)[e].$$



Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 4.30

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.
Spunem că $(\mathcal{A}, e)$ este **model** al lui Γ dacă $(\mathcal{A}, e)$ este model al fiecărei formule din Γ , adică

$$\mathcal{A} \models \gamma[e] \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Definiția 4.31

- ▶ Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- ▶ Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie** dacă Γ nu este satisfiabilă.



Definiția 4.32

Fie φ o formulă. Spunem φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$(\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \Gamma \implies (\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \varphi.$$

Notăție: $\Gamma \models \varphi$

Definiția 4.33

Fie Δ o mulțime de formule. Spunem că Δ este **consecință semantică** a lui Γ dacă

$$\Gamma \models \varphi \text{ pentru orice } \varphi \in \Delta.$$

Notăție: $\Gamma \models \Delta$



Lema 4.34

- (i) $\models \psi \iff \emptyset \models \psi$;
- (ii) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \models \psi$, atunci $\Delta \models \psi$.
- (iii) Dacă $\Gamma \models \Delta$ și $\Delta \models \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Noțiunile de **tautologie** și **consecință semantică** din logica propozițională se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv, o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectorilor $\neg, \rightarrow$.

Definiția 4.35

O **$\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr** este o funcție $F : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ ,

- ▶ $F(\neg\varphi) = \neg F(\varphi)$;
- ▶ $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$.

Propoziția 4.36

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$, funcția

$$V_{e,\mathcal{A}} : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}, \quad V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr.



Definiția 4.37

O formulă φ este **tautologie** dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr F .

Notăție: $\models_{\text{taut}} \varphi$

Exemple de tautologii: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

Propoziția 4.38

Orice tautologie este validă.

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e,\mathcal{A}}$ este $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. □

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu este tautologie.



Tautologii

Fie φ, ψ formule.

Definiția 4.39

ψ este **consecință tautologică** a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr F ,

$$F(\varphi) = 1 \implies F(\psi) = 1.$$

Notăție: $\varphi \models_{\text{taut}} \psi$

Definiția 4.40

Două formule φ și ψ sunt **tautologic echivalente** dacă $F(\varphi) = F(\psi)$ pentru orice $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr F .

Notăție: $\varphi \equiv_{\text{taut}} \psi$

Observație

- (i) $\varphi \models_{\text{taut}} \psi$ ddacă $\models_{\text{taut}} \varphi \rightarrow \psi$.
- (ii) $\varphi \equiv_{\text{taut}} \psi$ ddacă $(\psi \models_{\text{taut}} \varphi \text{ și } \varphi \models_{\text{taut}} \psi)$ ddacă $\models_{\text{taut}} \psi \leftrightarrow \varphi$.



Definiția 4.41

O formulă φ este **consecință tautologică** a unei mulțimi de formule Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr F ,

$$F(\gamma) = 1 \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma \implies F(\varphi) = 1.$$

Notăție: $\Gamma \models_{\text{taut}} \varphi$

Propoziția 4.42

Dacă φ este consecință tautologică a lui Γ , atunci $\Gamma \models \varphi$.

Dem.: Fie $(\mathcal{A}, e)$ un model al lui Γ . Atunci $\gamma^{\mathcal{A}}(e) = 1$, deci $V_{e, \mathcal{A}}(\gamma) = 1$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Deoarece φ este consecință tautologică a lui Γ , rezultă că $V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = 1$, deci $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. □

Definiția 4.43

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui $\mathcal{L}$ și x o variabilă.

- ▶ Spunem că variabila x **apare legată pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. $\varphi_i \dots \varphi_j$ este de forma $\forall x \psi$ cu ψ formulă.
- ▶ Spunem că x **apare liberă pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ .
- ▶ x este **variabilă legată** (bounded variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ .
- ▶ x este **variabilă liberă** (free variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ .

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$. Variabile libere: x, y, z . Variabile legate: x .



Notăție: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ .

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$FV(\varphi) = Var(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;}$$

$$FV(\neg\varphi) = FV(\varphi);$$

$$FV(\varphi \rightarrow \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi);$$

$$FV(\forall x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}.$$

Notăție: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.



Propoziția 4.44

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,
pentru orice termen t ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{Var}(t)$, atunci
$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 4.45

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,
pentru orice formulă φ ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci
$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

► $\varphi = t_1 = t_2$.

Atunci $Var(t_1) \subseteq FV(\varphi)$, $Var(t_2) \subseteq FV(\varphi)$, deci putem aplica
Propoziția 4.44 pentru a obține că

$$t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_1^{\mathcal{A}}(e_2) \quad \text{și} \quad t_2^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_1) \iff t_1^{\mathcal{A}}(e_2) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2) \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$



► $\varphi = Rt_1 \dots t_m$.

Atunci $Var(t_i) \subseteq FV(\varphi)$ pentru orice $i = 1, \dots, m$ și aplicăm din nou Propoziția 4.44 pentru a obține că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff (t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) \in R^{\mathcal{A}} \\ &\iff (t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) \in R^{\mathcal{A}} \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$



► $\varphi = \neg\psi$.

Deoarece $FV(\psi) = FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2].$$

Rezultă că

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$

• $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Deoarece $FV(\psi), FV(\chi) \subseteq FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \chi[e_2].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \\ &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_2] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$



► $\varphi = \forall x\psi$ și

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}.$$

Rezultă că pentru orice $a \in A$,

$$e_{1_{x \mapsto a}}(v) = e_{2_{x \mapsto a}}(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\psi).$$

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările $e_{1_{x \mapsto a}}, e_{2_{x \mapsto a}}$ pentru a obține că

$$\text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1_{x \mapsto a}}] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_{2_{x \mapsto a}}].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1_{x \mapsto a}}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{2_{x \mapsto a}}] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$





Propoziția 4.46

Pentru orice formulă φ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \models \exists x \varphi \quad (49)$$

$$\varphi \models \forall x \varphi \quad (50)$$

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$.

(49):

$\mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ (aplicând Propoziția 4.45)} \iff \mathcal{A} \models \varphi[e].$

(50): Exercițiu. □



Propoziția 4.47

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi, \quad \forall x(\psi \wedge \varphi) \models \forall x\psi \wedge \varphi \quad (51)$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \forall x\psi, \quad \forall x(\psi \vee \varphi) \models \forall x\psi \vee \varphi \quad (52)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \exists x\psi, \quad \exists x(\psi \wedge \varphi) \models \exists x\psi \wedge \varphi \quad (53)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi, \quad \exists x(\psi \vee \varphi) \models \exists x\psi \vee \varphi \quad (54)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (55)$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (56)$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \models \exists x\psi \rightarrow \varphi \quad (57)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi \quad (58)$$

Dem.: Exercițiu.



Demonstrăm (51) ca exemplu. Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \iff \text{pentru} \\ &\text{orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \text{ (aplicând Propoziția 4.45)} \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \\ &\text{și } \mathcal{A} \models (\forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \forall x\psi)[e]. \quad \square \end{aligned}$$

Definiția 4.48

O formulă φ se numește **enunț** (sentence) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.

Notăție: $Sent_{\mathcal{L}} :=$ mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziția 4.49

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 4.45 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. □

Definiția 4.50

O $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ este un **model** al lui φ dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \rightarrow A$. **Notăție:** $\mathcal{A} \models \varphi$



Propoziția 4.51

Pentru orice enunțuri φ, ψ ,

- (i) $\mathcal{A} \models \neg\varphi \iff \mathcal{A} \not\models \varphi$.
- (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi \iff \mathcal{A} \models \varphi$ implică $\mathcal{A} \models \psi$
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi$ sau $\mathcal{A} \models \psi$.
- (iii) $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi \iff \mathcal{A} \models \varphi$ și $\mathcal{A} \models \psi$.
- (iv) $\mathcal{A} \models \varphi \vee \psi \iff \mathcal{A} \models \varphi$ sau $\mathcal{A} \models \psi$.
- (v) $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi \iff \mathcal{A} \models \varphi$ dacă și numai dacă $\mathcal{A} \models \psi$.

Propoziția 4.52

Pentru orice $n \geq 2$ și orice enunțuri $\varphi_1, \dots, \varphi_n$,

- ▶ $\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ dacă și numai dacă $\mathcal{A} \models \varphi_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$.
- ▶ $\mathcal{A} \models \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ dacă există $i \in \{1, \dots, n\}$ a.î $\mathcal{A} \models \varphi_i$.



Fie φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ și Γ o mulțime de enunțuri.

Definiția 4.53

O $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ este un *model* al lui Γ dacă $\mathcal{A} \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$.

Notăție: $\mathcal{A} \models \Gamma$

Γ este *satisfiabilă* ddacă Γ are un model ddacă există o $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma$

$\Gamma \models \varphi$ ddacă pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models \Gamma \implies \mathcal{A} \models \varphi.$$



Fie x o variabilă a lui $\mathcal{L}$ și u termen al lui $\mathcal{L}$.

Definiția 4.54

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, definim

$t_x(u) :=$ expresia obținută din t prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui x cu u .

Propoziția 4.55

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, $t_x(u)$ este termen al lui $\mathcal{L}$.



- ▶ Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui x cu u .
- ▶ De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\models \forall x \varphi \rightarrow \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x \varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$.

- ▶ Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ cu $|A| \geq 2$, avem $\mathcal{A} \models \forall x \varphi$.
- ▶ $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.



Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 4.56

Spunem că x este **liberă pentru u** în φ sau că u este **substituibil pentru x** în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u , nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y\psi$ nu conține apariții libere ale lui x .

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- ▶ u nu conține variabile;
- ▶ φ nu conține variabile care apar în u ;
- ▶ nici o variabilă din u nu apare legată în φ ;
- ▶ x nu apare în φ ;
- ▶ φ nu conține apariții libere ale lui x .



Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ .

Definiția 4.57

$\varphi_x(u) :=$ expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui x cu u .

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o **substituție liberă**.

Propoziția 4.58

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui $\mathcal{L}$.

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

Propoziția 4.59

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x ,

(i) pentru orice termen t ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Propoziția 4.60

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u), \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

(ii) $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi$, $\models \varphi \rightarrow \exists x\varphi$.

(iii) Pentru orice simbol de constantă c ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c), \quad \models \varphi_x(c) \rightarrow \exists x\varphi.$$



În general, dacă x și y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie $\mathcal{L}_{ar}$, $\mathcal{N}$ și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ a.î.

$e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

- ▶ $\mathcal{N} \models (x < z)[e]$, deoarece $e(x) = 3 < 4 = e(z)$.
- ▶ Fie $\varphi := (x < z)_x(y) = y < z$. Avem că $\mathcal{N} \not\models \varphi[e]$, deoarece $e(y) = 5 > 4 = e(z)$.



Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

Propoziția 4.61

Pentru orice formulă φ , variabile distincte x și y astfel încât y nu apare în φ ,

$$\exists x\varphi \models \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \models \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 4.61 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (adică x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.



Definiția 4.62

Pentru orice formulă φ și orice variabile $y_1, \dots, y_k$, **varianta** $y_1, \dots, y_k$ -**liberă** φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- ▶ dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ ;
- ▶ dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;
- ▶ dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, atunci φ' este $\psi' \rightarrow \chi'$;
- ▶ dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w\psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \dots, y_k\} \\ \forall z\psi' & \text{altfel,} \end{cases}$$

unde w este prima variabilă din șirul $v_0, v_1, \dots$, care nu apare în ψ' și nu este printre $y_1, \dots, y_k$.



Definiția 4.63

φ' este **variantă** a lui φ dacă este varianta $y_1, \dots, y_k$ -liberă a lui φ pentru anumite variabile $y_1, \dots, y_k$.

Propoziția 4.64

- (i) Pentru orice formulă φ , dacă φ' este o variantă a lui φ , atunci $\varphi \models \varphi'$.
- (ii) Pentru orice formulă φ și orice termen t , dacă variabilele lui t se află printre $y_1, \dots, y_k$ și φ' este varianta $y_1, \dots, y_k$ -liberă a lui φ , atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.



Definiția 4.65

O formulă care nu conține cuantificatori se numește **liberă de cuantificatori** ("quantifier-free").

Definiția 4.66

O formulă φ este în **formă normală prenex** dacă

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \dots, x_n$ sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește **matricea** lui φ și $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ este **prefixul** lui φ .



Exemple de formule în formă normală prenex:

- ▶ Formulele libere de cuantificatori
- ▶ Formulele **universale**: $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori
- ▶ Formulele **existențiale**: $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori

Teorema 4.67 (Teorema de formă normală prenex)

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \models \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.



Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conține

- ▶ două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- ▶ un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- ▶ două simboluri de constante c, d .

Fie x, y, z variabile distincte.



Exemplul 4.68

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y(g(y, z) = c) \wedge \neg \exists x(f(x) = d)$$

Dem.: Avem

$$\varphi \quad \equiv \quad \exists y(g(y, z) = c) \wedge \forall x \neg(f(x) = d) \quad \text{aplicăm (35)}$$

$$\equiv \exists y(g(y, z) = c \wedge \forall x \neg(f(x) = d)) \quad \text{aplicăm (53)}$$

$$\equiv \exists y \forall x (g(y, z) = c \wedge \neg(f(x) = d)) \quad \text{aplicăm (51)}$$

Prin urmare,

$$\varphi^* = \exists y \forall x (g(y, z) = c \wedge \neg(f(x) = d))$$

este o formă normală prenex pentru φ .



Exemplul 4.69

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg \forall y (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d).$$

Dem.: Avem că

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \exists y \neg (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \text{ aplicăm (36)} \\ &\equiv \exists y \neg \exists z (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \text{ aplicăm (56)} \\ &\equiv \exists y \neg \exists z (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \text{ aplicăm (58)} \\ &\equiv \exists y \forall z \neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \text{ aplicăm (35)} \\ &\equiv \exists y \left(\forall z \neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \right) \text{ aplicăm (53)} \\ &\equiv \exists y \forall z \left(\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \right) \text{ aplicăm (51)} \end{aligned}$$

Exemplul 4.69

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg \forall y (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d).$$

Dem.: (continuare)

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \exists y \forall z \left(\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \right) \\ &\equiv \exists y \forall z \forall x \left(\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \right) \text{ aplicăm (51)} \\ &\equiv \exists y \forall z \forall x \left(\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists v (P(x, v) \rightarrow f(x) = d) \right) \\ &\quad \text{aplicăm Propoziția 4.61, unde } v \text{ este o variabilă nouă} \\ &\equiv \exists y \forall z \forall x \exists v \left(\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d) \right) \text{ aplicăm (53)}\end{aligned}$$

Deci, $\varphi^* = \exists y \forall z \forall x \exists v (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d))$ este o formă normală prenex pentru φ .



Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din enunțuri de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducerea de noi simboluri de funcții/constante, numite **simboluri de funcții/constante Skolem**.

Observație

Orice enunț liber de cuantificatori este universal.

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \dots, x_n$ sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Asociem lui φ un enunț universal φ^{Sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$:
Dacă φ este universal, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$.

Altfel, φ are una din formele:

- ▶ $\varphi = \exists x \psi$. Introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi_x(c)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- ▶ $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x \psi$ ($k \geq 1$). Introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\varphi^1 = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi_x(fx_1 \dots x_k)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$.

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ .

Dacă φ^1 este enunț universal, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este enunț universal, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \dots$, până ajungem la un enunț universal și acesta este φ^{Sk} .

φ^{Sk} este o **formă normală Skolem** a lui φ .



Exemple

- ▶ Fie θ o formulă liberă de cuantificatori a.î. $FV(\theta) = \{x\}$ și $\varphi = \exists x \theta$. Atunci $\varphi^1 = \theta_x(c)$, unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \theta_x(c)$.
- ▶ Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x \forall y \forall z R(x, y, z)$. Atunci
$$\varphi^1 = \forall y \forall z (R(x, y, z))_x(c) = \forall y \forall z R(c, y, z),$$
unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z R(c, y, z)$.
- ▶ Fie P un simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall y \exists z P(y, z)$. Atunci $\varphi^1 = \forall y (P(y, z))_z(f(y)) = \forall y P(y, f(y))$, unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y P(y, f(y))$.



Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj care conține un simbol de relație binară R și un simbol de funcție unară f . Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v).$$

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \forall y \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v)_z(g(y)) \\ &= \forall y \forall u \exists v (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v),\end{aligned}$$

unde g este un nou simbol de funcție unară

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v)_v(h(y, u)) \\ &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)),\end{aligned}$$

unde h este un nou simbol de funcție binară.

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)).$$



Teorema 4.70 (Teorema de formă normală Skolem)

Fie φ un enunț în formă normală prenex și φ^{Sk} o formă normală Skolem a sa.

- (i) $\models \varphi^{Sk} \rightarrow \varphi$, deci $\varphi^{Sk} \models \varphi$ în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.
- (ii) φ este satisfiabilă ddacă φ^{Sk} este satisfiabilă.

Observație

În general, φ și φ^{Sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.



Notăție: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , notăm

$$\text{Mod}(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $\text{Mod}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $\text{Mod}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

Lema 4.71

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ ,

- (i) $\Gamma \models \psi \iff \text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\psi).$
- (ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies \text{Mod}(\Delta) \subseteq \text{Mod}(\Gamma).$
- (iii) Γ este satisfiabilă $\iff \text{Mod}(\Gamma) \neq \emptyset.$

Dem.: Exercițiu ușor.



Definiția 4.72

O $\mathcal{L}$ -*teorie* este o mulțime T de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \models \varphi \implies \varphi \in T.$$

Definiția 4.73

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , *teoria generată de* Γ este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \models \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$



Propoziția 4.74

Fie Γ o mulțime de enunțuri.

- (i) $\text{Mod}(\Gamma) = \text{Mod}(\text{Th}(\Gamma))$.
- (ii) $\text{Th}(\Gamma)$ este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem.: Exercițiu.

- ▶ O teorie prezentată ca $\text{Th}(\Gamma)$ se numește **teorie axiomatică** sau teorie prezentată **axiomatic**. Γ se numește mulțime de **axiome** pentru $\text{Th}(\Gamma)$.
- ▶ Orice teorie poate fi prezentată axiomatice, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.



Definiția 4.75

O teorie T este **finit axiomatizabilă** dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ .

Definiția 4.76

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$ -structuri este **axiomatizabilă** dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ . Spunem și că Γ **axiomatizează** $\mathcal{K}$.

Definiția 4.77

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$ -structuri este **finit axiomatizabilă** dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime **finită** de enunțuri Γ .



Exemple - Teoria egalității

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \dots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 4.78

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 2$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$.

Notății

Fie $n \geq 1$.

$$\blacktriangleright \exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$$

$$\blacktriangleright \exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$$

Propoziția 4.79

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\leq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel mult } n \text{ elemente}$$

$$\mathcal{A} \models \exists^{=n} \iff \mathcal{A} \text{ are exact } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 4.80

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models T \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\} \iff \mathcal{A} \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.



Exemple - Teoria grafurilor

Un **graf** este o pereche $G = (V, E)$ de mulțimi a.î. E este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui V . Elementele lui V se numesc **vârfuri**, iar elementele lui E se numesc **muchii**.

- ▶ $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- ▶ $\mathcal{L}_{Graf}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$(IREFL) := \forall x \neg \dot{E}(x, x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)).$$

Definiție

Teoria grafurilor este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt grafurile.
- ▶ Γ axiomatizează clasa grafurilor. Prin urmare, clasa grafurilor este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria ordinii parțiale

- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (ANTISIM), (TRANZ)\}$, unde

$$(REFL) \quad := \quad \forall x (x \dot{\leq} x)$$

$$(ANTISIM) \quad := \quad \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y)$$

$$(TRANZ) \quad := \quad \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z)$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor parțial ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor parțial ordonate este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria ordinii totale

Fie $\Gamma := \{(ANTISIM), (TRANZ), (TOTAL)\}$, unde

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile total ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor total ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor total ordonate este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria ordinii stricte

- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ)\}$, unde

$$(IREFL) := \forall x \neg (x \dot{<} x)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z)$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor strict ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor strict ordonate este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria ordinii dense

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)\}$, unde

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x = y \vee x < y \vee y < x)$$

$$(DENS) := \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)).$$

Definiție

Teoria ordinii dense este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor dens ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor dens ordonate este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- ▶ $\mathcal{L}_{\equiv} = (\equiv, \emptyset, \emptyset) = (\equiv)$
- ▶ $\mathcal{L}_{\equiv}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (SIM), (TRANZ)\}$, unde

$$(REFL) := \forall x(x \equiv x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ Fie $\mathcal{K}$ clasa structurilor $(A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație de echivalență pe A . Avem că $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$, adică Γ axiomatizează $\mathcal{K}$. Prin urmare, $\mathcal{K}$ este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y (\neg(x = y) \wedge x \dot{=} y \wedge \forall z (z \dot{=} x \rightarrow (z = x \vee z = y))),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.



Teorema 4.81 (Teorema de compacitate)

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi



Teorema de compacitate - aplicații

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 4.82

Clasa $\mathcal{L}$ -structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

() pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.*

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură finită a.î. $|\mathcal{A}| \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$ și $\mathcal{A} \models \Gamma$ deoarece $\mathcal{A}$ este finită.



Teorema de compacitate - aplicații

Prin urmare, $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \models \Delta_0$. Așadar, Δ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model $\mathcal{B}$.

Deoarece $\mathcal{B} \models \Gamma$, $\mathcal{B}$ este finită.

Deoarece $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.

Am obținut o contradicție. □

Corolar 4.83

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.



Propoziția 4.84

Clasa $\mathcal{L}$ -structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu $\mathcal{K}_{Inf}$ clasa $\mathcal{L}$ -structurilor infinite.

Conform Propoziției 4.80, pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.



Teorema de compacitate - aplicații

Presupunem că $\mathcal{K}_{Inf}$ este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\varphi)$.

Rezultă că pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \text{ este finită} \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa $\mathcal{L}$ -structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 4.82. □.

Corolar 4.85

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.



Propoziția 4.86

Fie Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci Γ are un model infinit.

Dem.: Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit $\mathcal{A}$ a.î. $|A| \geq m$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$, deci $\mathcal{A} \models \Delta_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Δ are un model $\mathcal{B}$. Prin urmare, $\mathcal{B}$ este un model infinit al lui Γ . □



Propoziția 4.87

Dacă un enunț φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$ -structură infinită, atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$ -structură finită de cardinal $\geq m$.

Dem.: Presupunem că nu e adevărat. Fie $\Gamma := \{\neg\varphi\}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$. Aplicând Propoziția 4.86, rezultă că Γ are un model infinit $\mathcal{A}$. Prin urmare, $\mathcal{A} \not\models \varphi$, ceea ce contrazice ipoteza. $\square$



Fie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ un limbaj de ordinul întâi.

Definiția 4.88

Cardinalul lui $\mathcal{L}$ este prin definiție

$$\|\mathcal{L}\| := |\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}|.$$

- ▶ $\mathcal{L}$ este **finit** dacă $\|\mathcal{L}\|$ este finit.
- ▶ $\mathcal{L}$ este **numărabil** dacă $\|\mathcal{L}\| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.
- ▶ $\mathcal{L}$ este **cel mult numărabil** dacă $\mathcal{L}$ este finit sau numărabil.

Propoziția 4.89

$$|\text{Form}_{\mathcal{L}}| = \begin{cases} \aleph_0 & \text{dacă } \mathcal{L} \text{ este finit} \\ \|\mathcal{L}\| & \text{altfel.} \end{cases}$$



Fie t un termen, φ o formulă și $x_1, \dots, x_n$ variabile.

Notăție

- ▶ Scriem $t(x_1, \dots, x_n)$ dacă $\text{Var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.
- ▶ Scriem $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Notăție

- ▶ Fie $t(x_1, \dots, x_n)$ un termen. Scriem uneori $t^A[a_1, \dots, a_n]$ în loc de $t^A(e)$, unde $e : V \rightarrow A$ este o (orice) interpretare a.î. $e(x_1) = a_1, \dots, e(x_n) = a_n$.
- ▶ Fie $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ o formulă. Scriem uneori $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ în loc de $\mathcal{A} \models \varphi[e]$, unde $e : V \rightarrow A$ este o (orice) interpretare a.î. $e(x_1) = a_1, \dots, e(x_n) = a_n$.

Definiția 4.90

Fie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}; \text{ari}_{\mathcal{L}})$ și $\mathcal{L}^+ = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}; \text{ari}_{\mathcal{L}^+})$ două limbaje. Spunem că $\mathcal{L}^+$ este **extensie** a lui $\mathcal{L}$ sau că $\mathcal{L}$ este **sublimbaj** al lui $\mathcal{L}^+$ dacă

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}$$

și $\text{ari}_{\mathcal{L}}$ este restricția lui $\text{ari}_{\mathcal{L}^+}$ la $\mathcal{R}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.

Notăție: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$

Definiția 4.91

Spunem că $\mathcal{L}^+$ este o **extensie prin constante** a lui $\mathcal{L}$ dacă

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}.$$

Exemple

- $\mathcal{L}_= \subseteq \mathcal{L}$ pentru orice limbaj $\mathcal{L}$
- $\mathcal{L}_{<} = (\dot{<}) \subseteq (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}) \subseteq \mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$

Dacă $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, atunci orice termen (formulă) din $\mathcal{L}$ este termen (formulă) în $\mathcal{L}^+$.

Definiția 4.92

Fie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $\mathcal{A}^+$ o $\mathcal{L}^+$ -structură.

Spunem că $\mathcal{A}$ este $\mathcal{L}$ -**redușă** lui $\mathcal{A}^+$ sau că $\mathcal{A}^+$ este $\mathcal{L}^+$ -**extensia** lui $\mathcal{A}$ dacă

- ▶ $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^+|$;
- ▶ pentru orice $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$, $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}^+}$;
- ▶ pentru orice $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}^+}$;
- ▶ pentru orice $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}^+}$.

Notăție: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \upharpoonright \mathcal{L}$

Exemplu

$(\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ are redusele $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{N}, S, 0)$, $(\mathbb{N}, <)$.

Fie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură, $A = |\mathcal{A}|$ și $\mathcal{A}^+$ o $\mathcal{L}^+$ -extensie a lui $\mathcal{A}$.

Propoziția 4.93

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow A$, termen t al lui $\mathcal{L}$ și formulă φ a lui $\mathcal{L}$,

$$t^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}^+}(e) \quad \text{și} \quad \mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A}^+ \models \varphi[e].$$

Corolar 4.94

Pentru orice enunț φ al lui $\mathcal{L}$, $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{A}^+ \models \varphi$.

Propoziția 4.95

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ a lui $\mathcal{L}$,

- (i) $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A}^+ \models \Gamma$.
- (ii) $Th_{\mathcal{L}}(\Gamma) = Sen_{\mathcal{L}} \cap Th_{\mathcal{L}^+}(\Gamma)$.

Considerăm limbajul $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, unde $\dot{+}$, $\dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare, $\dot{S}$ este simbol de operație unară și $\dot{0}$ este simbol de constantă.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim prin inducție $\mathcal{L}$ -termenul $\Delta(n)$ astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n+1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie $\mathcal{L}$ -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. Atunci $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 4.96

O $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ se numește **non-standard** dacă există $a \in A$ a.î. $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de element a se numește **element non-standard**.



Teoria lui $\mathcal{N}$ se definește astfel:

$$Th(\mathcal{N}) := \{\varphi \in Sen_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{N} \models \varphi\}.$$

Se poate demonstra ușor că $Th(\mathcal{N})$ este o teorie.

Teorema 4.97

Există un model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$.

Dem.: Fie c un simbol de constantă nou, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c\}$ și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}^+}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \dots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$

Fie $n_0 > \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Considerăm extensia $\mathcal{N}^+$ a lui $\mathcal{N}$ la $\mathcal{L}^+$ definită astfel: $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$. Atunci $\mathcal{N}^+ \models \Gamma_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{A}^+ = (A, +, \times, S, 0, c^{\mathcal{A}^+}).$$

Prin urmare,

$$\mathcal{A}^+ \models Th(\mathcal{N}) \text{ și, pentru orice } n \in \mathbb{N}, c^{\mathcal{A}^+} \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}^+}.$$

Fie $\mathcal{L}$ -structura

$$\mathcal{A} = (A, +, \times, S, 0), \quad a := c^{\mathcal{A}^+} \in A.$$

Deoarece $\mathcal{A}^+ \models Th(\mathcal{N})$ și $Th(\mathcal{N}) \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$, avem că $\mathcal{A} \models Th(\mathcal{N})$. Cum $\Delta(n)^{\mathcal{A}^+} = \Delta(n)^{\mathcal{A}}$, avem că $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că a este element non-standard al lui $\mathcal{A}$.

Deci, $\mathcal{A}$ este model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$. □



Definiția 4.98

Fie A o mulțime nevidă. O relație de **bună ordonare** pe A este o relație de ordine totală $<$ pe A cu proprietatea că orice submulțime nevidă a lui A are minim.

Spunem că $(A, <)$ este mulțime **bine ordonată**.

Exemple

$(\mathbb{N}, <)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, <)$ nu este bine ordonată.



Propoziția 4.99

Clasa mulțimilor bine ordonate nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{<}$.

Dem.: Fie $\mathcal{K}$ clasa $\mathcal{L}_{<}$ -structurilor $\mathcal{A} = (A, <)$ a.î. $(A, <)$ este bine ordonată. Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{K}$ este axiomatizabilă, deci că

există Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}_{<}$ a.î. $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma)$.

Fie $\mathcal{L}^+$ extensia lui $\mathcal{L}_{<}$ obținută prin adăugarea simbolurilor de constantă c_n , $n \in \mathbb{N}$. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}^+}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in I\}, \text{ unde } I \subseteq \mathbb{N} \text{ este finită} \\ &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n = 0, \dots, M\} \text{ pentru un } M \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$



Aplicație a Teoremei de compacitate - mulțimi bine ordonate

Fie $(A, <)$ o mulțime infinită bine ordonată. Definim

$$\begin{aligned}a_{M+1} &:= \min A, \\a_M &:= \min A \setminus \{a_{M+1}\}, \\a_{M-1} &:= \min A \setminus \{a_{M+1}, a_M\}, \\&\vdots \\a_0 &:= \min A \setminus \{a_{M+1}, a_M, \dots, a_1\}.\end{aligned}$$

Atunci $a_{M+1} < a_M < \dots < a_0$.

Fie $\mathcal{A}^+$ extensia lui $\mathcal{A} = (A, <)$ la $\mathcal{L}^+$ obținută astfel:

$$c_0^{A^+} = a_0, \dots, c_{M+1}^{A^+} = a_{M+1}, \quad c_n^{A^+} \text{ arbitrar pentru } n > M + 1.$$

Atunci $\mathcal{A}^+ \models \Delta_0$.



Aplicație a Teoremei de compacitate - mulțimi bine ordonate

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

are un model

$$\mathcal{B}^+ = (B, <, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots),$$

deci $c_n^{\mathcal{B}^+} = b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $\mathcal{L}_{<}$ -structura

$$\mathcal{B} = (B, <).$$

Deoarece $\mathcal{B}^+ \models \Gamma$ și $\Gamma \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}_{<}}$, avem că $\mathcal{B} \models \Gamma$. Prin urmare, $(B, <)$ este bine ordonată.

Deoarece $\mathcal{B}^+ \models \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ rezultă că $b_{n+1} < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare,

$$S := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{nu are minim.}$$

Dar S este o submulțime nevidă a lui B . Am obținut o contradicție.





Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$ -structuri, $A = |\mathcal{A}|$, $B = |\mathcal{B}|$.

Definiția 4.100

O funcție $h : A \rightarrow B$ este **homomorfism** dacă:

(i) pentru orice $m \geq 1$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice elemente $a_1, \dots, a_m \in A$,

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) \iff R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m))$$

(ii) pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și orice elemente $a_1, \dots, a_m \in A$,

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m))$$

(iii) pentru orice $c \in \mathcal{C}$, $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Notăție: $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.



Definiția 4.101

Un homomorfism $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ se numește **izomorfism** dacă h este bijectiv.

Notăție: $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Un izomorfism $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}$ se numește **automorfism** al lui $\mathcal{A}$.

Definiția 4.102

$\mathcal{A}$ este **izomorfă** cu $\mathcal{B}$ dacă există $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Notăție: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Observație

Relația de izomorfism este o relație de echivalență pe clasa $\mathcal{L}$ -structurilor. Prin urmare, $\mathcal{A}$ este izomorfă cu $\mathcal{B}$ ddacă $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{A}$. De aceea, spunem de obicei că $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt izomorfe.



Lema 4.103

Pentru orice $\mathcal{L}^- \subseteq \mathcal{L}$,

- (i) $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ implică $h : \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}^- \rightarrow \mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}^-$.
- (ii) $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ implică $\mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}^- \simeq \mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}^-$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Exemplu

- ▶ $\mathcal{L} = (\dot{<}, \star, c)$, unde $\dot{<}$ este simbol de relație binară, $\star$ este simbol de operație binară și c este simbol de constantă.
- ▶ $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <, +, 0)$ și $\mathcal{B} = ((0, \infty), <, \cdot, 1)$.
- ▶ $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $h(x) = 2^x$ este izomorfism.

Fie $h : A \rightarrow B$. Oricărei evaluări $e : V \rightarrow A$ a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ i se asociază o evaluare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{B}$:

$$h \circ e : V \rightarrow B, \quad (h \circ e)(v) = h(e(v)).$$

Definiția 4.104

Spunem că h **respectă** un termen t dacă pentru orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$h(t^A(e)) = t^B(h \circ e).$$

Fie $t(x_1, \dots, x_n)$ un termen. Atunci h respectă $t \iff$ pentru orice $a_1, \dots, a_n \in A$, $h(t^A[a_1, \dots, a_n]) = t^B[h(a_1), \dots, h(a_n)]$.

Propoziția 4.105

Orice homomorfism $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ respectă toți termenii.

Dem.: Exercițiu. Prin inducție după termeni.



Exemplu

$$\mathcal{L} = (\dot{<}, \star, c), \mathcal{A} = (\mathbb{R}, <, +, 0), \mathcal{B} = ((0, \infty), <, \cdot, 1),$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad h(x) = 2^x,$$

$$t(x, y) = x \star (y \star c), \quad e : V \rightarrow A, \quad e(x) = 3, \quad e(y) = 7.$$

- ▶ $t^{\mathcal{A}}(e) = e(x) + (e(y) + c^{\mathcal{A}}) = 3 + (7 + 0) = 10$
- ▶ $t^{\mathcal{B}}(h \circ e) = h(e(x)) \cdot (h(e(y)) \cdot c^{\mathcal{B}}) = 2^{e(x)} \cdot (2^{e(y)} \cdot 1) = 2^3 \cdot (2^7 \cdot 1) = 2^{10}$
- ▶ $h(t^{\mathcal{A}}(e)) = 2^{t^{\mathcal{A}}(e)} = 2^{10} = t^{\mathcal{B}}(h \circ e).$



Definiția 4.106

Spunem că h **respectă** o formulă φ dacă pentru orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e].$$

Fie $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ o formulă. Atunci h respectă $\varphi \iff$ pentru orice $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)].$$



Propoziția 4.107

Orice izomorfism $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ respectă toate formulele.

Dem.: Trebuie să demonstrăm că pentru orice formulă φ ,
pentru orice evaluare $e : V \rightarrow A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e]$.

Aplicăm inducția pe formule. Fie $e : V \rightarrow A$. Avem următoarele cazuri:

► $\varphi = t_1 = t_2$. Atunci

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \varphi[e] &\iff t_1^A(e) = t_2^A(e) \iff h(t_1^A(e)) = h(t_2^A(e)) \\ &\text{deoarece } h \text{ este injectivă} \\ &\iff t_1^B(h \circ e) = t_2^B(h \circ e) \\ &\text{deoarece } h \text{ respectă termenii} \\ &\iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e]\end{aligned}$$



► $\varphi = Rt_1 \dots t_m$. Atunci

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \varphi[e] &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e) \dots t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ &\iff R^{\mathcal{B}}(h(t_1^{\mathcal{A}}(e)), \dots, h(t_m^{\mathcal{A}}(e))) \\ &\quad \text{deoarece } h \text{ este homomorfism} \\ &\iff R^{\mathcal{B}}(t_1^{\mathcal{B}}(h \circ e), \dots, t_m^{\mathcal{B}}(h \circ e)) \\ &\quad \text{deoarece } h \text{ respectă termenii} \\ &\iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e].\end{aligned}$$

► Pașii de inducție pentru $\neg$ și $\rightarrow$ sunt imediați.



► $\varphi = \forall x\psi$. Atunci

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \varphi[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{B} \models \psi[h \circ e_{x \mapsto a}] \\ &\quad \text{conform ipotezei de inducție pentru } \psi \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{B} \models \psi[(h \circ e)_{x \mapsto h(a)}] \\ &\quad \text{deoarece } h \circ e_{x \mapsto a} = (h \circ e)_{x \mapsto h(a)} \\ &\iff \text{pentru orice } b \in B, \mathcal{B} \models \psi[(h \circ e)_{x \mapsto b}] \\ &\quad \text{deoarece } h \text{ este surjectiv} \\ &\iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e].\end{aligned}$$





Definiția 4.108

Spunem că $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt **elementar echivalente** dacă pentru orice enunț φ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$

Notăție: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Lema 4.109

Pentru orice $\mathcal{L}^- \subseteq \mathcal{L}$,

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \text{ implică } \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}^- \equiv \mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}^-.$$

Dem.: Exercițiu ușor.



Propoziția 4.110

$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ implică $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Dem.: Fie $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ un izomorfism. Pentru orice enunț φ , avem

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \varphi &\iff \text{pentru o (orice) evaluare } e : V \rightarrow A, \quad \mathcal{A} \models \varphi[e] \\ &\iff \text{pentru o (orice) evaluare } e : V \rightarrow A, \quad \mathcal{B} \models \varphi[h \circ e] \\ &\quad \text{conform Propoziției 4.107} \\ &\iff \mathcal{B} \models \varphi.\end{aligned}$$





Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

- ▶ $\mathcal{L}_= = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$
- ▶ $\mathcal{L}_=$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A)$, unde A este mulțime nevidă.

Fie $\mathcal{A} = (A)$, $\mathcal{B} = (B)$ două $\mathcal{L}_=$ -structuri.

- ▶ $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \iff h : A \rightarrow B.$
- ▶ $h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff h : A \rightarrow B$ este bijecție.
- ▶ $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff |A| = |B|.$



Propoziția 4.111

Fie $\mathcal{A} = (A)$ o $\mathcal{L}_=$ -structură finită și $n = |A|$. Atunci enunțul $\exists^n$ caracterizează $\mathcal{A}$ până la izomorfism, adică: pentru orice $\mathcal{L}_=$ -structură $\mathcal{B} = (B)$,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff \mathcal{B} \models \exists^n.$$

Dem.: $\mathcal{B} \models \exists^n \iff |B| = n \iff |A| = |B| \iff \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. □

Propoziția 4.112

Pentru orice $\mathcal{L}_=$ -structuri finite $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Dem.: $(\Rightarrow)$ Conform Propoziției 4.110.

$(\Leftarrow)$ Presupunem că $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ și fie $n = |A|$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^n$, deci $\mathcal{B} \models \exists^n$. Se aplică acum propoziția precedentă. □



Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$ -structuri, $A = |\mathcal{A}|$, $B = |\mathcal{B}|$ și $h : A \rightarrow B$.

Definiția 4.113

h se numește **scufundare** dacă h este homomorfism injectiv.

Notăție: $h : \mathcal{A} \hookrightarrow_0 \mathcal{B}$.

Propoziția 4.114

h este scufundare $\iff h$ respectă toate formulele libere de cuantificatori.

Dem.: ($\Rightarrow$) Exercițiu.



Propoziția 4.114

h este scufundare $\iff h$ respectă toate formulele libere de cuantificatori.

Dem.: ($\Leftarrow$) Demonstrăm că h este homomorfism.

- Fie $m \geq 1$, $R \in \mathcal{R}_m$ și $a_1, \dots, a_m \in A$. Considerăm formula atomică

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) := Rx_1 \dots x_m.$$

Obținem

$$R^A(a_1, \dots, a_m) \iff \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_m]$$

$$\iff \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_m)]$$

deoarece h respectă toate formulele atomice

$$\iff R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m)).$$

Propoziția 4.114

h este scufundare $\iff h$ respectă toate formulele libere de cuantificatori.

Dem.: (continuare)

- Fie $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $a_1, \dots, a_m \in A$. Considerăm formula atomică

$$\varphi(x_1, \dots, x_m, y) := fx_1 \dots x_m = y.$$

Atunci pentru orice $b \in A$,

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) = b \iff \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_m, b]$$

$$\iff \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_m), h(b)]$$

deoarece h respectă toate formulele atomice

$$\iff f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m)) = h(b).$$

Prin urmare, $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m))$.



Propoziția 4.114

h este scufundare $\iff h$ respectă toate formulele libere de cuantificatori.

Dem.: (continuare)

- Fie c un simbol de constantă. Considerăm formula atomică

$$\varphi(y) := c = y.$$

Atunci pentru orice $b \in A$,

$$c^A = b \iff \mathcal{A} \models \varphi[b] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h(b)]$$

deoarece h respectă toate formulele atomice

$$\iff c^B = h(b).$$

Prin urmare, $h(c^A) = c^B$.

Am demonstrat, așadar, că h este homomorfism.



Propoziția 4.114

h este scufundare $\iff h$ respectă toate formulele libere de cuantificatori.

Dem.: (continuare) Demonstrăm în continuare că h este injectivă.
Fie $a, b \in A$. Considerăm formula atomică

$$\varphi(x, y) := x = y.$$

$$\begin{aligned} h(a) = h(b) &\iff \mathcal{B} \models \varphi[h(a), h(b)] \iff \mathcal{A} \models \varphi[a, b] \\ &\text{deoarece } h \text{ respectă toate formulele atomice} \\ &\iff a = b. \end{aligned}$$



Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$ -structuri, $A = |\mathcal{A}|$, $B = |\mathcal{B}|$. Presupunem că $A \subseteq B$ și fie $\iota_{A,B} : A \rightarrow B$, $\iota(a) = a$ injecția canonică.

Definiția 4.115

Spunem că $\mathcal{A}$ este **substructură** a lui $\mathcal{B}$ sau că $\mathcal{B}$ este **extensie** a lui $\mathcal{A}$ dacă $\iota_{A,B}$ este scufundare.

Notăție: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Prin urmare, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff$

(i) pentru orice $m \geq 1$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice elemente $a_1, \dots, a_m \in A$,

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) \iff R^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_m)$$

(ii) pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și orice elemente $a_1, \dots, a_m \in A$,

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) = f^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_m)$$

(iii) pentru orice $c \in \mathcal{C}$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.



Propoziția 4.116

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff$ pentru orice formulă liberă de cuantificatori φ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[e].$$

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

$\mathcal{L} = (R)$, unde R simbol de relație binară. Atunci $(\mathbb{N}, <)$ este substructură a lui $(\mathbb{Z}, <)$, dar nu este substructură a lui $(\mathbb{Z}, \leq)$.

Exemplu

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Gr} = (*, ^{-1}, \dot{e})$ și $\mathcal{B}$ grup. Atunci $\mathcal{A}$ este substructură a lui $\mathcal{B}$ dacă și numai dacă $\mathcal{A}$ este subgrup al lui $\mathcal{B}$.



Definiția 4.117

O formulă φ se numește **persistență în sus** (upward persistent) dacă pentru orice structuri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \implies \mathcal{B} \models \varphi[e].$$

Definiția 4.118

O formulă φ se numește **persistență în jos** (downward persistent) dacă pentru orice structuri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$.

$$\mathcal{B} \models \varphi[e] \implies \mathcal{A} \models \varphi[e].$$



Propoziția 4.119

- (i) *Orice formulă existențială este persistentă în sus.*
- (ii) *Orice formulă universală este persistentă în jos.*

Dem.: Exercițiu.

Exemplul 4.120

Fie $\mathcal{L}_{Gr} = (*, {}^{-1}, e)$. Atunci orice $\mathcal{L}_{Gr}$ -substructură a unui grup este grup, deoarece axiomele unui grup sunt universale, deci persistente în jos.



Fie $f : M^n \rightarrow M$ și $\emptyset \neq S \subseteq M$. Spunem că S este **închisă la f** dacă pentru orice $a_1, \dots, a_n \in S$, $f(a_1, \dots, a_n) \in S$.

Fie $X \subseteq B$.

Propoziția 4.121

Presupunem că $X \neq \emptyset$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) X este domeniul unei substructuri (unice) a lui $\mathcal{B}$;*
- (ii) X este închisă la $f^{\mathcal{B}}$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$ și $c^{\mathcal{B}} \in X$ pentru orice $c \in \mathcal{C}$.*

Dem.: Exercițiu ușor.

Corolar 4.122

Dacă $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$, atunci orice submulțime nevidă a lui B este domeniul unei substructuri unice a lui $\mathcal{B}$.



Propoziția 4.123

Presupunem că $X \neq \emptyset$ sau $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Atunci există o unică substructură $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$ a lui $\mathcal{B}$ cu următoarele proprietăți:

- (i) $X \subseteq |\langle X \rangle_{\mathcal{B}}|$;
 - (ii) $\langle X \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{D}$ pentru orice substructură $\mathcal{D}$ a lui $\mathcal{B}$ a.î. $X \subseteq |\mathcal{D}|$.
- $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$ se numește substructura lui $\mathcal{B}$ **generată** de X .

Dem.: Definim:

$$\begin{aligned} A_0 &= X \cup \{c^{\mathcal{B}} \mid c \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset, \\ A_{n+1} &= A_n \cup \{f^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_m) \mid m \geq 1, f \in \mathcal{F}_m, a_1, \dots, a_m \in A_n\} \end{aligned}$$

Se verifică ușor că $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ este cea mai mică mulțime care conține $X \cup \{c^{\mathcal{B}} \mid c \in \mathcal{C}\}$ și este închisă la $f^{\mathcal{B}}$ pentru $f \in \mathcal{F}$.
Atunci $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$ este unica substructură a lui $\mathcal{B}$ cu domeniul A . □

Observația 4.124

Presupunem că $X \neq \emptyset$ sau $C \neq \emptyset$. Atunci $|\langle X \rangle_{\mathcal{B}}|$ este intersecția tuturor mulțimilor $Y \subseteq B$ a.î. $X \subseteq Y$ și Y este domeniul unei substructuri a lui $\mathcal{B}$.

Propoziția 4.125

Dacă $\mathcal{L}$ are cel puțin un simbol de constantă, atunci

$$|\langle \emptyset \rangle_{\mathcal{B}}| = \{t^{\mathcal{B}} \mid t \text{ este termen închis al lui } \mathcal{L}\}.$$

Dem.: Exercițiu.

Exemple

- ▶ $\mathcal{L} = (\dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, S, 0)$. Atunci $|\langle \emptyset \rangle_{\mathcal{N}}| = \mathbb{N}$, deci $\langle \emptyset \rangle_{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$.
- ▶ $\mathcal{L} = (\dot{0})$, $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0)$. Atunci $|\langle \emptyset \rangle_{\mathcal{N}}| = \{0\}$, deci $\langle \emptyset \rangle_{\mathcal{N}} = (\{0\}, 0)$.

Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două $\mathcal{L}$ -structuri, $A = |\mathcal{A}|$ și $B = |\mathcal{B}|$.

Definiția 4.126

Spunem că $\mathcal{A}$ este **substructură elementară** a lui $\mathcal{B}$ sau că $\mathcal{B}$ este **extensie elementară** a lui $\mathcal{A}$ dacă

- (i) $A \subseteq B$;
- (ii) pentru orice formulă φ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,
$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[e].$$

Notăție: $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Propoziția 4.127

Dacă $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, atunci $A \subseteq B$ și $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Dem.: Exercițiu.



Exemplu

Fie $\mathcal{L} = (\dot{\leq})$, $\mathcal{A} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$ și $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, \leq)$. Atunci $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, deci $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Dar $\mathcal{A} \not\preceq \mathcal{B}$.

Considerăm formula

$$\varphi(x) = \forall y (x \dot{\leq} y).$$

Atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[1], \text{ dar } \mathcal{B} \not\models \varphi[1],$$

adică 1 este cel mai mic element în $\mathcal{A}$, dar nu în $\mathcal{B}$.

Considerăm formula

$$\psi(x) = \exists y (y \dot{\leq} x \wedge \neg(x = y)).$$

Atunci

$$\mathcal{B} \models \psi[1], \text{ dar } \mathcal{A} \not\models \psi[1],$$

adică 1 are un predecesor în $\mathcal{B}$, dar nu în $\mathcal{A}$.

Următorul rezultat este un instrument foarte util pentru a demonstra că o substructură este elementară.

Propoziția 4.128 (Criteriul lui Tarski)

Presupunem că $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și că pentru orice formulă φ , orice evaluare $e : V \rightarrow A$ și orice variabilă x ,

$$\mathcal{B} \models (\exists x \varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{B} \models \varphi[e_{x \mapsto a}].$$

Atunci $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dem.: Demonstrăm prin inducție după formule că pentru orice formulă φ ,

$$(*) \text{ pentru orice evaluare } e : V \rightarrow A, \quad \mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[e].$$

Avem următoarele cazuri:

- ▶ φ este formulă atomică. Atunci (*) rezultă din faptul că $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și Propoziția 4.116.
- ▶ Pașii de inducție pentru $\neg$ și $\rightarrow$ sunt imediați.

Propoziția 4.128 (Criteriul lui Tarski)

Presupunem că $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ și că pentru orice formulă φ , orice evaluare $e : V \rightarrow A$ și orice variabilă x ,

$$\mathcal{B} \models (\exists x \varphi) [e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{B} \models \varphi[e_{x \mapsto a}].$$

Atunci $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dem.: (continuare)

► $\varphi = \forall x \psi$. Fie $e : V \rightarrow A$. Deoarece $\varphi \models \neg \exists x \neg \psi$,

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{B} \models (\neg \exists x \neg \psi) [e] \iff \mathcal{B} \not\models (\exists x \neg \psi) [e] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{B} \not\models (\neg \psi) [e_{x \mapsto a}] \text{ din ipoteză} \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{B} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \\ &\quad \text{din ipoteza de inducție} \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e]. \end{aligned}$$



Teorema Löwenheim-Skolem în jos

Putem enunța acum unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi.

Teorema 4.129 (Teorema Löwenheim-Skolem în jos)

Pentru orice limbaj cel mult numărabil $\mathcal{L}$, orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{B}$ și orice submulțime cel mult numărabilă $X \subseteq B$, există o $\mathcal{L}$ -structură cel mult numărabilă $\mathcal{A}$ a.î. $X \subseteq A$ și $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Corolar 4.130

Pentru orice limbaj cel mult numărabil $\mathcal{L}$ și orice mulțime Γ de enunțuri, dacă Γ are un model, atunci Γ are un model cel mult numărabil.

Dem.: Exercițiu.



Teorema Löwenheim-Skolem în jos

Teorema Löwenheim-Skolem în jos

Pentru orice limbaj cel mult numărabil $\mathcal{L}$, orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{B}$ și orice submulțime cel mult numărabilă $X \subseteq B$, există o $\mathcal{L}$ -structură cel mult numărabilă $\mathcal{A}$ a.î. $X \subseteq A$ și $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dem.: Pentru orice formulă φ și variabilă y definim o **constantă/funcție Skolem** $F_{\varphi,y}$.

Dacă formula $\exists y\varphi$ este enunț, atunci $F_{\varphi,y}$ este un element al lui B definit astfel:

- ▶ Dacă $\mathcal{B} \models \exists y\varphi$, atunci mulțimea $S_1 := \{b \in B \mid \mathcal{B} \models \varphi[b]\}$ este nevidă. $F_{\varphi,y}$ este un element arbitrar al lui S_1 .
- ▶ Dacă $\mathcal{B} \not\models \exists y\varphi$, atunci $F_{\varphi,y}$ este un element arbitrar al lui B .

Ca urmare, $\mathcal{B} \models \exists y\varphi \implies \mathcal{B} \models \varphi[F_{\varphi,y}]$.



Teorema Löwenheim-Skolem în jos

Teorema Löwenheim-Skolem în jos

Pentru orice limbaj cel mult numărabil $\mathcal{L}$, orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{B}$ și orice submulțime cel mult numărabilă $X \subseteq B$, există o $\mathcal{L}$ -structură cel mult numărabilă $\mathcal{A}$ a.î. $X \subseteq A$ și $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dem.: (continuare) Dacă $FV(\exists y\varphi) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $k \geq 1$, atunci definim $F_{\varphi,y} : B^k \rightarrow B$ astfel: pentru orice $b_1, \dots, b_k \in B$,

- ▶ Dacă $\mathcal{B} \models \exists y\varphi[b_1, \dots, b_k]$, atunci mulțimea $S_2 := \{b \in B \mid \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_k, b]\}$ este nevidă. $F_{\varphi,y}(b_1, \dots, b_k)$ este un element arbitrar al lui S_2 .
- ▶ Dacă $\mathcal{B} \not\models \exists y\varphi[b_1, \dots, b_k]$, atunci $F_{\varphi,y}(b_1, \dots, b_k)$ este un element arbitrar al lui B .

Ca urmare,

$$\mathcal{B} \models \exists y\varphi[b_1, \dots, b_k] \implies \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_k, F_{\varphi,y}(b_1, \dots, b_k)]$$



Teorema Löwenheim-Skolem în jos

Teorema Löwenheim-Skolem în jos

Pentru orice limbaj cel mult numărabil $\mathcal{L}$, orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{B}$ și orice submulțime cel mult numărabilă $X \subseteq B$, există o $\mathcal{L}$ -structură cel mult numărabilă $\mathcal{A}$ a.î. $X \subseteq A$ și $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Dem.: (continuare) Extindem construcția lui $\langle X \rangle_{\mathcal{B}}$ (a se vedea Propoziția 4.123) închizând-o și la constantele și funcțiile Skolem. Așadar, fie A cea mai mică submulțime a lui B care:

- ▶ conține $X \cup \{c^{\mathcal{B}} \mid c \in \mathcal{C}\} \cup \{F_{\varphi, y} \mid \exists y \varphi \text{ enunț}\}$;
- ▶ este închisă la $f^{\mathcal{B}}$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$;
- ▶ este închisă la funcțiile Skolem $F_{\varphi, y}$, când $\exists y \varphi$ nu este enunț.

Obținem că A este domeniul unei substructuri unice $\mathcal{A}$ a lui $\mathcal{B}$. Deoarece X este cel mult numărabilă și $\mathcal{L}$ este cel mult numărabil, A este cel mult numărabilă. Aplicând Criteriul lui Tarski, rezultă imediat că $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. □

Definiția 4.131

Mulțimea $Axm_{\mathcal{L}} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ a **axiomelor (logice)** ale lui $\mathcal{L}$ constă din:

- (i) toate tautologiile.
- (ii) formulele de forma

$$t = t, \quad s = t \rightarrow t = s, \quad s = t \wedge t = u \rightarrow s = u,$$

pentru orice termeni s, t, u .

- (iii) formulele de forma

$$t_1 = u_1 \wedge \dots \wedge t_m = u_m \rightarrow ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m,$$

$$t_1 = u_1 \wedge \dots \wedge t_m = u_m \rightarrow (Rt_1 \dots t_m \leftrightarrow Ru_1 \dots u_m),$$

pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni t_i, u_i ($i = 1, \dots, m$).

- (iv) formulele de forma

$$\varphi_x(t) \rightarrow \exists x \varphi,$$

unde $\varphi_x(t)$ este o substituție liberă (**$\exists$ -axiomele**).



Definiția 4.132

Regulile de deducție (sau inferență) sunt următoarele: pentru orice formule φ, ψ ,

(i) *din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (*modus ponens* sau (MP)):*

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

(ii) *dacă $x \notin FV(\psi)$, atunci din $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă $\exists x\varphi \rightarrow \psi$ (*$\exists$ -introducerea*):*

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x\varphi \rightarrow \psi} \quad \text{dacă } x \notin FV(\psi).$$



Fie Γ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 4.133

Γ -teoremele lui $\mathcal{L}$ sunt formulele definite astfel:

- ($\Gamma 0$) Orice axiomă logică este Γ -teoremă.
- ($\Gamma 1$) Orice formulă din Γ este Γ -teoremă.
- ($\Gamma 2$) Dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ sunt Γ -teoreme, atunci ψ este Γ -teoremă.
- ($\Gamma 3$) Dacă $\varphi \rightarrow \psi$ este Γ -teoremă și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\exists x \varphi \rightarrow \psi$ este Γ -teoremă.
- ($\Gamma 4$) Numai formulele obținute aplicând regulile ($\Gamma 0$) ($\Gamma 1$), ($\Gamma 2$) și ($\Gamma 3$) sunt Γ -teoreme.

Dacă φ este Γ -teoremă, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ .



Notății

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \varphi$ este Γ -teoremă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

Definiția 4.134

O formulă φ se numește **teoremă (logică)** a lui $\mathcal{L}$ dacă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Reformulând condițiile din definiția Γ -teoremelor folosind notația $\vdash$, obținem

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ , au loc următoarele:

- (i) Dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$;
- (ii) Dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$;
- (iii) Dacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ și $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.
- (iv) Dacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$ și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \exists x \varphi \rightarrow \psi$.



Definiția 4.135

O Γ -*demonstrație* (*demonstrație din ipotezele Γ*) a lui $\mathcal{L}$ este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ astfel încât pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ astfel încât $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$;
- (iv) există $j < i$ astfel încât

$$\theta_j = \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \theta_i = \exists x \varphi \rightarrow \psi, \text{ unde } x \notin FV(\psi).$$

O $\emptyset$ -*demonstrație* se va numi simplu *demonstrație*.



Definiția 4.136

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ astfel încât $\theta_n = \varphi$.

Propoziția 4.137

Fie Γ o mulțime de formule. Pentru orice formulă φ ,

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ ddacă există o Γ -demonstrație a lui φ .

Fie Γ o mulțime de formule.

Teorema 4.138 (Teorema Tautologiei (Post))

Fie $\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ astfel încât

- (i) ψ este consecință tautologică a mulțimii $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.
- (ii) $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_2, \dots, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$.

Atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

Teorema 4.139 (Teorema Deducției)

Fie ψ o formulă și φ un **enunț**. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi \quad \text{dacă} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi.$$

Propoziția 4.140

Pentru orice formulă φ și orice variabilă x ,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \forall x \varphi.$$



Definiția 4.141

Fie φ o formulă cu $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$. *Închiderea universală* a lui φ este enunțul

$$\overline{\varphi} := \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi.$$

Notății 4.142

$$\overline{\forall \Gamma} := \{\overline{\forall \psi} \mid \psi \in \Gamma\}.$$

Propoziția 4.143

Pentru orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \overline{\varphi} \iff \overline{\forall \Gamma} \vdash \varphi \iff \overline{\forall \Gamma} \vdash \overline{\varphi}.$$



Definiția 4.144

Fie Γ o mulțime de formule. Spunem că

- (i) Γ este **consistentă** dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.
- (ii) Γ este **inconsistentă** dacă nu este consistentă, adică $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ pentru orice formulă φ .

Propoziția 4.145

Pentru orice mulțime de formule Γ , următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este inconsistentă.
- (ii) Pentru orice formulă ψ , $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.
- (iii) Există o formulă ψ astfel încât $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.



Teorema de completitudine

Teorema de completitudine - prima versiune

Fie Γ o mulțime de enunțuri.

Γ este consistentă $\iff \Gamma$ este satisfiabilă.

Teorema de completitudine - a doua versiune

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ și orice enunț φ ,

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \iff \Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi.$$

- ▶ Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat.
- ▶ Henkin a dat în teza sa de doctorat din 1947 o demonstrație simplificată.