

Logică Matematică și Computațională

Anul I, Semestrul II 2026

Laurențiu Leuștean

Pagina web: <https://cs.unibuc.ro/courses/lmc/>

1

LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

2

Logica propozițională - informal

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**, despre care se poate argumenta în principiu că sunt **adevărate** sau **false**.

Propoziții declarative

- ▶ Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- ▶ Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- ▶ Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- ▶ Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- ▶ Andrei este deștept.
- ▶ Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- ▶ Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- ▶ Pleacă!

3

Logica propozițională - informal

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm $p, q, r, \dots$ sau $p_1, p_2, p_3, \dots$

Exemple: p =Numărul 2 este par. q =Mâine plouă. r =Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate $\varphi, \psi, \chi, \dots$) folosind conectorii logici $\neg$ (negația), $\rightarrow$ (implicația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\leftrightarrow$ (echivalența).

Exemple:

- | | | |
|-----------------------|---|--|
| $\neg p$ | = | Numărul 2 nu este par. |
| $p \vee q$ | = | Numărul 2 este par sau mâine plouă. |
| $p \wedge q$ | = | Numărul 2 este par și mâine plouă. |
| $p \rightarrow q$ | = | Dacă numărul 2 este par, atunci mâine plouă. |
| $p \leftrightarrow q$ | = | Numărul 2 este par dacă și numai dacă mâine plouă. |

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele $(,)$.

Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

4

Exemplu:

Fie propoziția:

φ = Dacă este frig afară, trebuie să îmi iau paltonul.

Considerăm propozițiile atomice

p = Este frig afară. q = Trebuie să îmi iau paltonul.

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ = Este frig afară și nu trebuie să îmi iau paltonul.

5

Exemplu:

Fie propoziția:

φ = Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.

Considerăm propozițiile atomice

p = Trenul întârzie.

q = Sunt taxiuri la gară.

r = Ion întârzie la întâlnire.

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q ? q este adevărată.

6

Definiția 1.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de **variabile**;
- ▶ conectori logici: $\neg$ (se citește **non**), $\rightarrow$ (se citește **implică**)
- ▶ paranteze: $(,)$.

- Mulțimea **Sim** a **simbolurilor** lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \dots$

7

Definiția 1.2

Mulțimea **Expr** a **expresiilor** lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ . Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui LP de lungime n .
- ▶ Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:

$((((v_7, v_1 \neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2, ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)), (\neg(v_1 \rightarrow v_2))).$

8

Operația de bază pentru expresii este **concatenarea**: dacă $\varphi = \varphi_0 \dots \varphi_{k-1}$ și $\psi = \psi_0 \dots \psi_{l-1}$ sunt expresii, atunci concatenarea lor, notată $\varphi\psi$, este expresia $\varphi_0 \dots \varphi_{k-1}\psi_0 \dots \psi_{l-1}$.

Definiția 1.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in \text{Sim}$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește (i, j) -**subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j) -subexpresia lui θ .

9

Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 1.4

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Notații: Mulțimea formulelor se notează **Form**. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \dots$

- ▶ Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- ▶ $\text{Form} \subseteq \text{Expr}$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

10

Exemple:

- ▶ $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- ▶ $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Citare unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

11

Propoziția 1.5 (Principiul inducției pe formule)

Fie **P** o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea **P**.
- (1) Pentru orice formulă φ , dacă φ are proprietatea **P**, atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea **P**.
- (2) Pentru orice formule φ, ψ , dacă φ și ψ au proprietatea **P**, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea **P**.

Atunci orice formulă φ are proprietatea **P**.

Dem.: Pentru orice formulă φ , notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ . Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată dacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea **P**.

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

12

Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea **P**.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- ▶ $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea **P**, conform (0).
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea **P**. Aplicând ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea **P**.
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea **P**. Rezultă din (2) că φ are proprietatea **P**.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea **P**. $\square$

13

Principiul inducției pe formule

Propoziția 1.6 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶ $V \subseteq \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\rightarrow$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = \text{Form}$.

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ , φ are proprietatea **P** dacă $\varphi \in \Gamma$.

Conform definiției lui Γ , rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 1.5), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea **P**, deci orice formulă φ este în Γ . Așadar, $\Gamma = \text{Form}$. $\square$

14

Subformule

Definiția 1.7

Fie φ o formulă a lui LP. O **subformulă** a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ .

Notăție: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $\text{SubForm}(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$. Atunci

$$\text{SubForm}(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \rightarrow v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

15

Formule

Conectorii derivați $\vee$ (se citește **sau**), $\wedge$ (se citește **și**), $\leftrightarrow$ (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$\begin{aligned}(\varphi \vee \psi) &:= ((\neg\varphi) \rightarrow \psi) \\(\varphi \wedge \psi) &:= (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))) \\(\varphi \leftrightarrow \psi) &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).\end{aligned}$$

Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
 - $\neg$ are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
 - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

16

Propoziția 1.8 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_{\neg} : A \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Form} \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ .

(R2) $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ .

17

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da **definiții recursive** ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : \text{Form} \rightarrow \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ , $c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ .

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$c(v) = 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v$$

$$c(\neg\varphi) = c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi$$

$$c(\varphi \rightarrow \psi) = c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi.$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \rightarrow A$, $G_0(v) = 0$,

$$G_{\neg} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad G_{\neg}(n) = n + 1,$$

$$G_{\rightarrow} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad G_{\rightarrow}(m, n) = m + n + 1.$$

18

Notăție:

Pentru orice formulă φ , notăm cu $\text{Var}(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ .

Observație

Mulțimea $\text{Var}(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.

19

SEMANTICA LP

20

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr:
1 pentru **adevărat** și 0 pentru **fals**. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0, 1\}$ folosind **tabelele de adevăr**.

$$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$$\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \rightarrow q = 0 \iff p = 1$ și $q = 0$.

21

Operațiile $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ și $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0, 1\}$, $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Dem.: Exercițiu.

22

Definiția 1.9

O **evaluare** (sau **interpretare**) este o funcție $e : V \rightarrow \{0, 1\}$.

Teorema 1.10

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ există o unică funcție

$$e^+ : \text{Form} \rightarrow \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- ▶ $e^+(v) = e(v)$ pentru orice $v \in V$;
- ▶ $e^+(\neg \varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \text{Form}$;
- ▶ $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in \text{Form}$.

Dem.: Aplicăm Principiul recursiei pe formule (Propoziția 1.8) cu $A = \{0, 1\}$, $G_0 = e$, $G_\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_\neg(p) = \neg p$ și $G_\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_\rightarrow(p, q) = p \rightarrow q$. □

23

Propoziția 1.11

Dacă $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ ,

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \vee \psi) &= e^+(\varphi) \vee e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi). \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

24

Propoziția 1.12

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,

φ are proprietatea **P** dacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.

25

Propoziția 1.12

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = \neg\psi$ și ψ satisface **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**.

26

Propoziția 1.12

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ și ψ, χ satisfac **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\psi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$ și $\text{Var}(\chi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi)$ și pentru orice $v \in \text{Var}(\chi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ și χ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**. □

27

Fie φ o formulă.

Definiția 1.13

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. **Notăție:** $e \models \varphi$.
- φ este **satisfiabilă** dacă admite un model.
- Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.
- φ este **tautologie** dacă orice evaluare este model al lui φ . **Notăție:** $\models \varphi$.

Notăție: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $\text{Mod}(\varphi)$.

Propoziția 1.14

- (i) φ este tautologie dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.
- (ii) φ este nesatisfiabilă dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Dem.: Exercițiu.

28

Fie φ o formulă arbitrară și $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \dots, e(x_k)$, conform Propoziției 1.12.

Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2, \dots, e'_{2^k}$. Asociem fiecareia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	...	x_k	... subformule ale lui φ ...	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	...	$e'_1(x_k)$	...	$e'^+_1(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	...	$e'_2(x_k)$	...	$e'^+_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	...	$e'_{2^k}(x_k)$	...	$e'^+_{2^k}(\varphi)$

Pentru orice i , $e'^+_i(\varphi)$ se definește similar cu Teorema 1.10.

φ este tautologie ddacă pentru orice $i \in \{1, \dots, 2^k\}$, $e'^+_i(\varphi) = 1$

φ este satisfiabilă ddacă există $i \in \{1, \dots, 2^k\}$ a.î. $e'^+_i(\varphi) = 1$

29

Exemplu:

Fie

$$\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

$$Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

v_1	v_2	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)$	φ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

30

Definiția 1.15

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- φ este **consecință semantică** a lui ψ dacă $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$. **Notăție:** $\psi \models \varphi$.
- φ și ψ sunt **(logic) echivalente** dacă $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$. **Notăție:** $\varphi \sim \psi$.

Observație

Relația $\sim$ este o relație de echivalență pe mulțimea $Form$ a formulelor lui LP .

Propoziția 1.16

Fie φ, ψ formule. Atunci

- (i) $\psi \models \varphi$ ddacă $\models \psi \rightarrow \varphi$.
- (ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Dem.: Exercițiu.

31

Propoziția 1.17

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

- terțul exclus** $\models \varphi \vee \neg \varphi$ (1)
- modus ponens** $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi$ (2)
- afirmarea concluziei** $\psi \models \varphi \rightarrow \psi$ (3)
- contradicția** $\models \neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$ (4)
- dubla negație** $\varphi \sim \neg \neg \varphi$ (5)
- contrapozitia** $\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$ (6)
- negarea premisei** $\neg \varphi \models \varphi \rightarrow \psi$ (7)
- modus tollens** $\neg \psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \neg \varphi$ (8)
- tranzitivitatea implicației** $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$ (9)

32

legile lui de Morgan $\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi$ (10)

$\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$ (11)

exportarea și importarea $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ (12)

idempotența $\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$ (13)

slăbirea $\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ (14)

comutativitatea $\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$ (15)

asociativitatea $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ (16)

$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$ (17)

absorbția $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$ (18)

$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$ (19)

distributivitatea $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ (20)

$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ (21)

33

$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$ (22)

$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi)$ (23)

$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$ (24)

$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$ (25)

$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ (26)

$\neg\varphi \sim \varphi \rightarrow \neg\varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (27)

$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ (28)

$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$ (29)

$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi$ (30)

$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ (31)

$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (32)

$\models \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$ (33)

$\models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ (34)

Dem.: Exercițiu.

34

Exemplu de demonstrație

Demonstrăm (1): $\models \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$.

Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- ▶ $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- ▶ $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.

35

$\top$ și $\perp$

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație

$v_0 \rightarrow v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Exercițiu.

Notații

Notăm $v_0 \rightarrow v_0$ cu $\top$ și o numim **adevăru**. Notăm $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ cu $\perp$ și o numim **falsul**.

- ▶ φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- ▶ φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \perp$.

36

Definiția 1.18

Pentru orice formule φ, χ, χ' , definim

$\varphi_{\chi}(\chi') :=$ expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui χ cu χ' .

$\varphi_{\chi}(\chi')$ se numește **substituția lui χ cu χ' în φ** . Spunem și că $\varphi_{\chi}(\chi')$ este o **instanță de substituție** a lui φ .

- ▶ $\varphi_{\chi}(\chi')$ este de asemenea formulă.
- ▶ $\varphi_{\varphi}(\chi') = \chi'$.
- ▶ Dacă χ nu este subformulă a lui φ , atunci $\varphi_{\chi}(\chi') = \varphi$.

Exemple:

Fie $\varphi = (v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow v_2)$.

- ▶ $\chi = v_1 \rightarrow v_2, \chi' = v_4. \quad \varphi_{\chi}(\chi') = v_4 \rightarrow \neg v_4$
- ▶ $\chi = v_1, \chi' = \neg\neg v_2. \quad \varphi_{\chi}(\chi') = (\neg\neg v_2 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(\neg\neg v_2 \rightarrow v_2)$
- ▶ $\chi = v_1 \rightarrow v_2, \chi' = v_4 \vee v_1. \quad \varphi_{\chi}(\chi') = (v_4 \vee v_1) \rightarrow \neg(v_4 \vee v_1)$

37

Propoziția 1.19

Pentru orice formule φ, χ, χ' ,

$\chi \sim \chi' \text{ implică } \varphi \sim \varphi_{\chi}(\chi')$.

Propoziția 1.20

Pentru orice formule φ, ψ, χ și orice variabilă $v \in V$,

- ▶ $\varphi \sim \psi \text{ implică } \varphi_v(\chi) \sim \psi_v(\chi)$.
- ▶ Dacă φ este tautologie atunci și $\varphi_v(\chi)$ este tautologie.
- ▶ Dacă φ este nesatisfiabilă, atunci și $\varphi_v(\chi)$ este nesatisfiabilă.

38

Notății

Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$. Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$

$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n$.

- ▶ $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.
- ▶ $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.

39

Propoziția 1.21

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$,

- ▶ $e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **orice** $i \in \{1, \dots, n\}$.
- ▶ $e^+(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **un** $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.22

$\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n$

$\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$

Dem.: Exercițiu.

40

FORMA NORMALĂ CONJUNCTIVĂ / DISJUNCTIVĂ

41

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Definiția 1.23

Un *literal* este o

- ▶ variabilă (în care caz spunem că este *literal pozitiv*) sau
- ▶ negația unei variabile (în care caz spunem că este *literal negativ*).

Exemple: v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi; $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Convenție: $\bigvee_{i=1}^1 \varphi_i = \varphi_1$ și $\bigwedge_{i=1}^1 \varphi_i = \varphi_1$.

Definiția 1.24

O formulă φ este în *formă normală disjunctivă (FND)* dacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar, φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

42

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Definiția 1.25

O formulă φ este în *formă normală conjunctivă (FNC)* dacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.

Așadar, φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Exemple

- ▶ $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- ▶ $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- ▶ $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- ▶ $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- ▶ $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC

43

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Notăție: Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Propoziția 1.26

- Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg \varphi \sim \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.
- Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg \varphi \sim \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.

Dem.: Exercițiu.

44

Exemplu: Arătați că $\models v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_1 \wedge v_2)$.

v_1	v_2	$v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_1 \wedge v_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Acest tabel definește o funcție $F : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$

ε_1	ε_2	$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Fie φ o formulă și $Var(\varphi) = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}\}$, unde $n \geq 1$ și $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

Fie $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$. Definim $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} : Var(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(v_{i_k}) = \varepsilon_k \text{ pentru orice } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Definim $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \in \{0, 1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) := e^+(\varphi),$$

unde $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este orice evaluare care extinde $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$, adică, $e(v_{i_k}) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(v_{i_k}) = \varepsilon_k$ pentru orice $k \in \{1, \dots, n\}$. Conform Propoziției 1.12, definiția nu este ambiguă.

Definiția 1.27

Funcția asociată lui φ este $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \text{ pentru orice } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n.$$

Așadar, F_φ este funcția definită de tabela de adevăr pentru φ .

Propoziția 1.28

(i) Fie φ o formulă. Atunci

1.1 $\models \varphi$ dacă F_φ este funcția constantă 1.

1.2 φ este nesatisfiabilă dacă F_φ este funcția constantă 0.

(ii) Fie φ, ψ două formule astfel încât $Var(\varphi) = Var(\psi)$. Atunci

2.1 $\varphi \models \psi$ dacă $F_\varphi \leq F_\psi$.

2.2 $\varphi \sim \psi$ dacă $F_\varphi = F_\psi$.

(iii) Există formule diferite φ, ψ a.î. $F_\varphi = F_\psi$.

Definiția 1.29

O **funcție booleană** este o funcție $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, unde $n \geq 1$. Spunem că n este **numărul variabilelor** lui F .

Exemplu: Pentru orice formulă φ , F_φ este funcție Booleană cu n variabile, unde $n = |Var(\varphi)|$.

Teorema 1.30

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă φ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0$ pentru orice $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$,

luăm $\varphi := \bigvee_{i=1}^n (v_i \wedge \neg v_i)$. Avem că $Var(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$, așadar,

$F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Cum $v_i \wedge \neg v_i$ este nesatisfiabilă pentru orice i , rezultă că φ este de asemenea nesatisfiabilă. Deci, F_φ este funcția constantă 0.

Altcumva, mulțimea

$$T := H^{-1}(1) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1\}$$

este nevidă.

Considerăm formula

$$\varphi := \bigvee_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in T} \left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} v_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg v_i \right).$$

Deoarece $\text{Var}(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$, avem că $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Demonstrăm că pentru orice $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \{0, 1\}^n$, avem că

$$F_\varphi(\delta_1, \dots, \delta_n) = 1 \iff H(\delta_1, \dots, \delta_n) = 1,$$

de unde va rezulta imediat că $H = F_\varphi$.

Avem că $F_\varphi(\delta_1, \dots, \delta_n) = 1 \iff e_{\delta_1, \dots, \delta_n}^+(\varphi) = 1$

$\iff e^+(\varphi) = 1$ pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e(v_i) = \delta_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e(v_i) = \delta_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) = 1 &\iff \bigvee_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in T} (\bigwedge_{\varepsilon_i=1} e(v_i) \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg e(v_i)) = 1 \\ &\iff \bigvee_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in T} (\bigwedge_{\varepsilon_i=1} \delta_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg \delta_i) = 1 \\ &\iff \text{există } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in T \text{ a.î.} \\ &\quad \bigwedge_{\varepsilon_i=1} \delta_i = 1 \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg \delta_i = 1 \\ &\iff \text{există } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in T \text{ a.î. } \delta_i = \varepsilon_i \\ &\quad \text{pentru orice } i \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff (\delta_1, \dots, \delta_n) \in T \\ &\iff H(\delta_1, \dots, \delta_n) = 1. \end{aligned}$$

Prin urmare, $F_\varphi(\delta_1, \dots, \delta_n) = 1 \iff H(\delta_1, \dots, \delta_n) = 1$. □

Teorema 1.31

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ o funcție booleană arbitrară.

Atunci există o formulă ψ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1$ pentru orice $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, atunci luăm

$$\psi := \bigwedge_{i=1}^n (v_i \vee \neg v_i).$$

Avem că $\text{Var}(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$, așadar, $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Cum $v_i \vee \neg v_i$ este tautologie pentru orice i , rezultă că φ este de asemenea tautologie. Deci, F_φ este funcția constantă 1.

Altcumva, mulțimea

$$F := H^{-1}(0) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0\}$$

este nevidă.

Considerăm formula

$$\psi := \bigwedge_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in F} \left(\bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg v_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} v_i \right).$$

Deoarece $\text{Var}(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$, avem că $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Demonstrăm că pentru orice $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \{0, 1\}^n$, avem că

$$F_\varphi(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0 \iff H(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0,$$

de unde va rezulta imediat că $H = F_\varphi$.

Avem că $F_\varphi(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0 \iff e_{\delta_1, \dots, \delta_n}^+(\varphi) = 0$
 $\iff e^+(\varphi) = 0$ pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e(v_i) = \delta_i$
 pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e(v_i) = \delta_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) = 0 &\iff \bigwedge_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in F} (\bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg e(v_i) \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} e(v_i)) = 0 \\ &\iff \bigwedge_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in F} (\bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg \delta_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} \delta_i) = 0 \\ &\iff \text{există } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in F \text{ a.î.} \\ &\quad \bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg \delta_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} \delta_i = 0 \\ &\iff \text{există } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in F \text{ a.î. } \delta_i = \varepsilon_i \\ &\quad \text{pentru orice } i \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff (\delta_1, \dots, \delta_n) \in F \\ &\iff H(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0. \end{aligned}$$

Prin urmare, $F_\varphi(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0 \iff H(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0$. $\square$

Exemplu: Fie $H : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ descrisă prin tabelul:

ε_1	ε_2	ε_3	$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	
0	0	0	0	$D_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$
0	0	1	0	$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$
0	1	0	1	$C_1 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
0	1	1	0	$D_3 = v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$
1	0	0	1	$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
1	0	1	1	$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$
1	1	0	1	$C_4 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
1	1	1	1	$C_5 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

$\varphi = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5$ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

$\psi = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Teorema 1.32

Orice formulă φ este echivalentă cu o formulă φ^{FND} în FND și cu o formulă φ^{FNC} în FNC.

Dem.:

Fie $n = |\text{Var}(\varphi)|$ și $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ funcția booleană asociată. Aplicând Teorema 1.30 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FND} în FND a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FND}}$. Așadar, conform Propoziției 1.28.(ii), $\varphi \sim \varphi^{FND}$.

Similar, aplicând Teorema 1.31 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FNC} în FNC a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FNC}}$. Prin urmare, $\varphi \sim \varphi^{FNC}$. $\square$

Algoritm pentru a aduce o formulă la FNC/FND:

Pasul 1. Se înlocuiesc implicațiile și echivalențele, folosind:

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \quad \text{și} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg \varphi \vee \psi) \wedge (\neg \psi \vee \varphi).$$

Pasul 2. Se înlocuiesc dublurile negații, folosind $\neg \neg \psi \sim \psi$, și se aplică regulile De Morgan pentru a înlocui

$$\neg(\varphi \vee \psi) \text{ cu } \neg \varphi \wedge \neg \psi \quad \text{și} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \text{ cu } \neg \varphi \vee \neg \psi.$$

Pasul 3. Pentru FNC, se aplică distributivitatea lui $\vee$ fața de $\wedge$, pentru a înlocui

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \text{ cu } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \text{ cu } (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi).$$

Pentru FND, se aplică distributivitatea lui $\wedge$ fața de $\vee$, pentru a înlocui

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \text{ cu } (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \vee \chi) \wedge \varphi \text{ cu } (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi).$$

Exemplu

Considerăm formula $\varphi := (\neg v_0 \rightarrow \neg v_2) \rightarrow (v_0 \rightarrow v_2)$.

Avem

$$\begin{aligned}\varphi &\sim \neg(\neg v_0 \rightarrow \neg v_2) \vee (v_0 \rightarrow v_2) && \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (v_0 \rightarrow v_2) && \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) && \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) && \text{Pasul 2} \\ &\sim (\neg v_0 \wedge \neg\neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) && \text{Pasul 2} \\ &\sim (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2 && \text{Pasul 2}\end{aligned}$$

Putem lua $\varphi^{FND} := (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2$.

Pentru a obține FNC, continuăm cu Pasul 3:

$$\begin{aligned}\varphi &\sim (\neg v_0 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \\ &\sim (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2).\end{aligned}$$

Putem lua $\varphi^{FNC} := (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2)$. Se observă, folosind idempotența și comutativitatea lui $\vee$, că $\varphi^{FNC} \sim \neg v_0 \vee v_2$.

57

CLAUZE ȘI REZOLUȚIE

58

Clauze

Definiția 1.33

O **clauză** este o mulțime finită de literali:

$$C = \{L_1, \dots, L_n\}, \text{ unde } L_1, \dots, L_n \text{ sunt literali.}$$

Dacă $n = 0$, obținem clauza vidă $\square := \emptyset$.

O clauză nevidă este considerată implicit o disjuncție.

Definiția 1.34

Fie C o clauză și $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Spunem că **e este model al lui C** sau că **e satisface C** și scriem $e \models C$ dacă există $L \in C$ a.î. $e \models L$.

Definiția 1.35

O clauză C se numește

- (i) **satisfiabilă** dacă are un model.
- (ii) **validă** dacă orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al lui C .

59

Clauze

Definiția 1.36

O clauză C este **trivială** dacă există un literal L a.î. $L \in C$ și $L^c \in C$.

Propoziția 1.37

- (i) Orice clauză nevidă este satisfiabilă.
- (ii) Clauza vidă $\square$ este nesatisfiabilă.
- (iii) O clauză este validă dacă este trivială.

Dem.: Exercițiu.

Notăm $\text{Var}(C) := \{x \in V \mid x \in C \text{ sau } \neg x \in C\}$.

Dacă $x \in \text{Var}(C)$, spunem ca x **apare în** C .

► $\text{Var}(C) = \emptyset$ dacă $C = \square$.

60

$S = \{C_1, \dots, C_m\}$ este o mulțime finită de clauze.

Dacă $m = 0$, obținem mulțimea vidă de clauze $\emptyset$.

S este considerată implicit ca o formulă în FNC: conjuncție de disjuncții ale literalilor din fiecare clauză.

Definiția 1.38

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Spunem că e este model al lui S sau că e satisface S și scriem $e \models S$ dacă $e \models C_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$.

Definiția 1.39

S se numește

- (i) **satisfiabilă** dacă are un model.
- (ii) **validă** dacă orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al lui S .

61

Propoziția 1.40

- Dacă S conține clauza vidă $\square$, atunci S este nesatisfiabilă.
- $\emptyset$ este validă.

Dem.: Exercițiu.

Notăm $\text{Var}(S) := \bigcup_{C \in S} \text{Var}(C)$.

Dacă $x \in \text{Var}(S)$, spunem ca x apare în S .

- $\text{Var}(S) = \emptyset$ ddacă ($S = \emptyset$ sau $S = \{\square\}$).

62

Exemplu

$S = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ este satisfiabilă.

Dem.: Considerăm $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e(v_1) = e(v_2) = 1$. Atunci $e \models S$. □

Exemplu

$S = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{v_3\}\}$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Presupunem că S are un model e . Atunci $e(v_1) = e(v_3) = 1$ și, deoarece $e \models \{\neg v_3, \neg v_2\}$, trebuie să avem $e(v_2) = 0$. Rezultă că $e(v_2) = e^+(\neg v_1) = 0$, deci e nu satisface $\{\neg v_1, v_2\}$. Am obținut o contradicție. □

63

Unei formule φ în FNC îi asociem o mulțime finită de clauze S_φ astfel:

Fie

$$\varphi := \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right),$$

unde fiecare $L_{i,j}$ este literal. Pentru orice i , fie C_i clauza obținută considerând toți literalii $L_{i,j}, j \in \{1, \dots, k_i\}$ distincți. Fie S_φ mulțimea tuturor clauzelor $C_i, i \in \{1, \dots, n\}$ distincte.

S_φ se mai numește și **forma clauzală** a lui φ .

Propoziția 1.41

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e \models \varphi$ ddacă $e \models S_\varphi$.

64

Unei mulțimi finite de clauze $\mathcal{S}$ îi asociem o formulă $\varphi_{\mathcal{S}}$ în FNC astfel:

- ▶ $C = \{L_1, \dots, L_n\}, n \geq 1 \mapsto \varphi_C := L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n.$
- ▶ $\square \mapsto \varphi_{\square} := v_0 \wedge \neg v_0.$

Fie $\mathcal{S} = \{C_1, \dots, C_m\}$ o mulțime nevidă de clauze. Formula asociată lui $\mathcal{S}$ este

$$\varphi_{\mathcal{S}} := \bigwedge_{i=1}^m \varphi_{C_i}.$$

Formula asociată mulțimii vide de clauze este $\varphi_{\emptyset} := v_0 \vee \neg v_0.$

Formula $\varphi_{\mathcal{S}}$ nu este unic determinată, depinde de ordinea în care se scriu elementele în clauze și în $\mathcal{S}$, dar se observă imediat că:

$\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ implică $\varphi_{\mathcal{S}} \sim \varphi_{\mathcal{S}'}.$

Propoziția 1.42

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e \models \mathcal{S}$ dacă și numai dacă $e \models \varphi_{\mathcal{S}}.$

65

Definiția 1.43

Fie C_1, C_2 două clauze. O clauză R se numește **rezolvent** al clauzelor C_1, C_2 dacă există un literal L a.î. $L \in C_1, L^c \in C_2$ și

$$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\}).$$

Regula Rezoluției

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1, C_2}{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})}, \quad L \in C_1, L^c \in C_2$$

Notăm cu $\text{Res}(C_1, C_2)$ mulțimea rezolvenților clauzelor $C_1, C_2.$

- ▶ Rezoluția a fost introdusă de **Blake** (1937) și dezvoltată de **Davis, Putnam** (1960) și **Robinson** (1965).
- ▶ Multe demonstratoare automate de teoreme folosesc rezoluția. Limbajul PROLOG este bazat pe rezoluție.

66

Exemplu

$C_1 = \{v_1, v_2, \neg v_5\}, C_2 = \{v_1, \neg v_2, v_{100}, v_5\}.$

- ▶ Luăm $L := \neg v_5$. Atunci $L \in C_1$ și $L^c = v_5 \in C_2$. Prin urmare, $R = \{v_1, v_2, \neg v_2, v_{100}\}$ este rezolvent al clauzelor $C_1, C_2.$
- ▶ Dacă luăm $L' := v_2$, atunci $L' \in C_1$ și $L'^c = \neg v_2 \in C_2$. Prin urmare, $R' = \{v_1, \neg v_5, v_{100}, v_5\}$ este rezolvent al clauzelor $C_1, C_2.$

Exemplu

$C_1 = \{v_7\}, C_2 = \{\neg v_7\}.$ Atunci clauza vidă $\square$ este rezolvent al clauzelor $C_1, C_2.$

67

Fie $\mathcal{S}$ o mulțime finită de clauze.

Definiția 1.44

O **derivare prin rezoluție din $\mathcal{S}$** sau o **$\mathcal{S}$ -derivare prin rezoluție** este o secvență $C_1, C_2, \dots, C_n$ de clauze a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- C_i este o clauză din $\mathcal{S};$
- există $j, k < i$ a.î. C_i este rezolvent al clauzelor $C_j, C_k.$

Definiția 1.45

Fie C o clauză. O **derivare prin rezoluție a lui C din $\mathcal{S}$** este o $\mathcal{S}$ -derivare prin rezoluție $C_1, C_2, \dots, C_n$ a.î. $C_n = C.$

68

Exemplu

Fie

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{\neg v_4\}\}.$$

O derivare prin rezoluție a clauzei vide $\square$ din $\mathcal{S}$ este următoarea:

C_1	$=$	$\{\neg v_4\}$	$C_1 \in \mathcal{S}$
C_2	$=$	$\{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}$	$C_2 \in \mathcal{S}$
C_3	$=$	$\{\neg v_2, \neg v_3\}$	C_3 rezolvent al clauzelor C_1, C_2
C_4	$=$	$\{v_3\}$	$C_4 \in \mathcal{S}$
C_5	$=$	$\{\neg v_2\}$	C_5 rezolvent al clauzelor C_3, C_4
C_6	$=$	$\{\neg v_1, v_2\}$	$C_6 \in \mathcal{S}$
C_7	$=$	$\{\neg v_1\}$	C_7 rezolvent al clauzelor C_5, C_6
C_8	$=$	$\{v_1\}$	$C_8 \in \mathcal{S}$
C_9	$=$	$\square$	C_9 rezolvent al clauzelor C_7, C_8 .

69

Notăm $\text{Res}(\mathcal{S}) := \bigcup_{C_1, C_2 \in \mathcal{S}} \text{Res}(C_1, C_2)$.

Propoziția 1.46

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$e \models \mathcal{S} \Rightarrow e \models \text{Res}(\mathcal{S}).$$

Dem.: Dacă $\text{Res}(\mathcal{S}) = \emptyset$, atunci este validă, deci $e \models \text{Res}(\mathcal{S})$. Presupunem că $\text{Res}(\mathcal{S})$ este nevidă și fie $R \in \text{Res}(\mathcal{S})$. Atunci există clauze $C_1, C_2 \in \mathcal{S}$ și un literal L a.î. $L \in C_1, L^c \in C_2$ și $R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$. Avem două cazuri:

- $e \models L$. Atunci $e \not\models L^c$. Deoarece $e \models C_2$, există $U \in C_2, U \neq L^c$ a.î. $e \models U$. Deoarece $U \in R$, obținem că $e \models R$.
- $e \not\models L$. Deoarece $e \models C_1$, există $U \in C_1, U \neq L$ a.î. $e \models U$. Deoarece $U \in R$, obținem că $e \models R$. □

70

Teorema 1.47 (Teorema de corectitudine a rezoluției)

Dacă $\square$ se derivează prin rezoluție din $\mathcal{S}$, atunci $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Fie $C_1, C_2, \dots, C_n = \square$ o $\mathcal{S}$ -derivare prin rezoluție a lui $\square$.

Presupunem că $\mathcal{S}$ este satisfiabilă și fie $e \models \mathcal{S}$.

Demonstrăm prin inducție după i că:

$$\text{pentru orice } 1 \leq i \leq n, e \models C_i.$$

Pentru $i = n$, obținem că $e \models \square$, ceea ce este o contradicție.

Cazul $i = 1$ este evident, deoarece $C_1 \in \mathcal{S}$.

Presupunem că $e \models C_j$ pentru orice $j < i$. Avem două cazuri:

- $C_i \in \mathcal{S}$. Atunci $e \models C_i$.
- există $j, k < i$ a.î. $C_i \in \text{Res}(C_j, C_k)$. Deoarece, conform ipotezei de inducție, $e \models \{C_j, C_k\}$ aplicăm Propoziția 1.46 pentru a conclud că $e \models C_i$. □

71

Intrare: $\mathcal{S}$ mulțime finită nevidă de clauze netriviiale.

$i := 1, \mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

Pi.1 Fie x_i o variabilă care apare în $\mathcal{S}_i$. Definim

$$\mathcal{T}_i^1 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid x_i \in C\}, \quad \mathcal{T}_i^0 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid \neg x_i \in C\}.$$

Pi.2 **if** $(\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset \text{ și } \mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset)$ **then**

$$\mathcal{U}_i := \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in \mathcal{T}_i^1, C_0 \in \mathcal{T}_i^0\}.$$

else $\mathcal{U}_i := \emptyset$.

Pi.3 Definim

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{i+1} &:= (\mathcal{S}_i \setminus (\mathcal{T}_i^0 \cup \mathcal{T}_i^1)) \cup \mathcal{U}_i; \\ \mathcal{S}_{i+1} &:= \mathcal{S}'_{i+1} \setminus \{C \in \mathcal{S}'_{i+1} \mid C \text{ trivială}\}. \end{aligned}$$

Pi.4 **if** $\mathcal{S}_{i+1} = \emptyset$ **then** $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.

else if $\square \in \mathcal{S}_{i+1}$ **then** $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

else $\{i := i + 1; \text{ go to Pi.1}\}$.

72

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$. $i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_3$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{v_1, \neg v_3\}\}$.

P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$.

P1.3 $\mathcal{S}_2' := \{\{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$; $\mathcal{S}_2 := \{\{v_2, v_1\}\}$.

P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1 $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_2, v_1\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \emptyset$.

P2.2 $\mathcal{U}_2 := \emptyset$.

P2.3 $\mathcal{S}_3 := \emptyset$.

P2.4 $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.

73

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}$.

$i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_1$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_1, v_3\}, \{v_1\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.3 $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1. $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}\}$.

P2.2 $\mathcal{U}_2 := \{\{v_3, \neg v_4, \neg v_3\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P2.3 $\mathcal{S}_3 := \{\{v_3\}, \{v_4\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P2.4 $i := 3$ and go to P3.1.

P3.1 $x_3 := v_3$; $\mathcal{T}_3^1 := \{\{v_3\}\}$; $\mathcal{T}_3^0 := \{\{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P3.2 $\mathcal{U}_3 := \{\{\neg v_4\}\}$. P3.3 $\mathcal{S}_4 := \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$.

P3.4 $i := 4$ and go to P4.1.

P4.1 $x_4 := v_4$; $\mathcal{T}_4^1 := \{\{v_4\}\}$; $\mathcal{T}_4^0 := \{\{\neg v_4\}\}$.

P4.2 $\mathcal{U}_4 := \{\square\}$. P4.3 $\mathcal{S}_5 := \{\square\}$.

P4.4 $\mathcal{S}$ nu este satisfiabilă.

74

Algoritmul DP - terminare

Propoziția 1.48

Fie $n := |\text{Var}(\mathcal{S})|$. Atunci algoritmul DP se termină după cel mult n pași.

Dem.: Se observă imediat că pentru orice i ,

$$\text{Var}(\mathcal{S}_{i+1}) \subseteq \text{Var}(\mathcal{S}_i) \setminus \{x_i\} \subsetneq \text{Var}(\mathcal{S}_i).$$

Prin urmare, $n = |\text{Var}(\mathcal{S}_1)| > |\text{Var}(\mathcal{S}_2)| > |\text{Var}(\mathcal{S}_3)| > \dots \geq 0$. $\square$

Fie $N \leq n$ numărul de pași după care se termină DP. Atunci

$\mathcal{S}_{N+1} = \emptyset$ sau $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$.

75

Algoritmul DP - corectitudine și completitudine

Propoziția 1.49

Pentru orice $i \leq N$,

$$\mathcal{S}_{i+1} \text{ este satisfiabilă} \iff \mathcal{S}_i \text{ este satisfiabilă}.$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Teorema 1.50

Algoritmul DP este corect și complet, adică,

$$\mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă} \text{ ddacă } \square \in \mathcal{S}_{N+1}.$$

Dem.: Aplicăm Propoziția 1.49. Obținem că $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ este nesatisfiabilă ddacă $\mathcal{S}_{N+1}$ este nesatisfiabilă ddacă $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$. $\square$

76

SINTAXA LP

77

Sistemul deductiv

Folosim un **sistem deductiv** de tip Hilbert pentru *LP*.

Axiomele logice

Mulțimea *Axm* a **axiomelor** lui *LP* constă din toate formulele de forma:

$$(A1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(A2) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(A3) \quad (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi),$$

unde φ , ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ ,

din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (**modus ponens** sau **(MP)**):

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}.$$

78

Γ -teoreme

Fie Γ o mulțime de formule. Definiția Γ -teoremelor este un nou exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 1.51

Γ -teoremele sunt formulele lui *LP* definite astfel:

(T0) Orice axiomă este Γ -teoremă.

(T1) Orice formulă din Γ este Γ -teoremă.

(T2) Dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ sunt Γ -teoreme, atunci ψ este Γ -teoremă.

(T3) Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ -teoreme.

Dacă φ este Γ -teoremă, atunci spunem și că φ este **dedusă din ipotezele** Γ .

79

Γ -teoreme

Notății

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ -teoremelor	Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ este Γ -teoremă	$\vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	$:\Leftrightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.			

Definiția 1.52

O formulă φ se numește **teoremă** a lui *LP* dacă $\vdash \varphi$.

Reformulăm condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația $\vdash$:

Propoziția 1.53

(i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

80

Definiția Γ -teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin **inducție după Γ -teoreme**.

Versiunea 1

Fie P o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ -teoremă satisface P astfel:

- (i) Demonstrăm că orice axiomă are proprietatea P .
- (ii) Demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea P .
- (iii) Demonstrăm că dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ au proprietatea P , atunci ψ are proprietatea P .

Versiunea 2

Fie Σ o mulțime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

- (i) Demonstrăm că orice axiomă este în Σ .
- (ii) Demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ .
- (iii) Demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

81

Propoziția 1.54

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

- (i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

- (ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.

- (iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,

$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

- (iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $Thm(\Gamma) \vdash \varphi$ ddacă $\Gamma \vdash \varphi$.

82

Definiția 1.55

O Γ -**demonstrație** (**demonstrație din ipotezele Γ**) este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$.

O $\emptyset$ -demonstrație se va numi simplu **demonstrație**.

Lema 1.56

Dacă $\theta_1, \dots, \theta_n$ este o Γ -demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}.$$

83

Definiția 1.57

Fie φ o formulă. O Γ -**demonstrație a lui φ** sau **demonstrație a lui φ din ipotezele Γ** este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește **lungimea** Γ -demonstrației.

Propoziția 1.58

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ -demonstrație a lui φ .

84

Propoziția 1.59

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ ,

$\Gamma \vdash \varphi$ dacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.

Dem.: " $\Leftarrow$ " Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 1.54.(i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 1.58, φ are o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \dots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$ este o Σ -demonstrație a lui φ , deci $\Sigma \vdash \varphi$. □

85

Propoziția 1.60

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Dem.:

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi, \chi := \varphi$) și Propoziția 1.53.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 1.53.(i)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 1.53.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)
- (4) $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi$) și Propoziția 1.53.(i)
- (5) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$
(MP): (3), (4) □

86

Teorema 1.61 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \subseteq \text{Form}$ și $\varphi, \psi \in \text{Form}$. Atunci

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ dacă $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Teorema deducției este un instrument foarte util pentru a arăta că o formulă e teoremă.

87

Propoziția 1.62

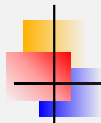
Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (35)$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{aligned} & \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi. \end{aligned}$$

88



Câteva consecințe

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ Propoziția 1.53.(ii)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ Propoziția 1.53.(ii)
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (MP): (1), (2)
- (4) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ Propoziția 1.53.(ii)
- (5) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (MP): (3), (4). $\square$

89



Câteva consecințe

Propoziția 1.63

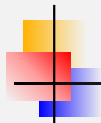
Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi.$$

Dem.:

- (1) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ipoteză
- (2) $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ P.1.62 și P.1.54.(ii)
- (3) $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ (MP): (1), (2)
- (4) $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$ ipoteză
- (5) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ (MP): (3), (4). $\square$

90



Câteva consecințe

Propoziția 1.64

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \quad (36)$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.65

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Exercițiu.

91



Câteva consecințe

Propoziția 1.66

Pentru orice formule φ, ψ ,

$$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi \quad (37)$$

$$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \quad (38)$$

$$\vdash \psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi) \quad (39)$$

$$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi \quad (40)$$

$$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \quad (41)$$

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \quad (42)$$

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi) \quad (43)$$

$$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi \quad (44)$$

$$\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi \quad (45)$$

Dem.: Exercițiu.

92

Propoziția 1.67

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ ,
 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ și $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$.

Dem.:

- | | |
|--|---------------------|
| (1) $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ | ipoteză |
| (2) $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$ | Teorema deducției |
| (3) $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$ | ipoteză |
| (4) $\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \varphi$ | Teorema deducției |
| (5) $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\psi)$ | (42) și P.1.54.(ii) |
| (6) $\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\psi$ | (MP): (2), (5) |
| (7) $\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \varphi$ | (6), (4) și P. 1.63 |
| (8) $\Gamma \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ | (45) și P.1.54.(ii) |
| (9) $\Gamma \vdash \varphi$ | (MP): (7), (8). |

93

Propoziția 1.68

Pentru orice formule φ, ψ ,

$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \quad (46)$$

$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \quad (47)$$

$$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi \quad (48)$$

$$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \quad \text{dacă} \quad \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi \quad (49)$$

$$\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi \quad (50)$$

Dem.: Exercițiu.

94

SINTAXA și SEMANTICA

95

Corectitudine

Teorema 1.69 (Teorema de corectitudine (Soundness Theorem))

Orice teoremă este tautologie:

$$\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$$

pentru orice $\varphi \in \text{Form}$.

Dem.: Fie

$\Sigma :=$ mulțimea tuturor tautologiilor lui LP .

Trebuie să demonstrăm că $\text{Thm} \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după teoreme.

- ▶ Axiomele sunt în Σ (exercițiu).
- ▶ Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens.
 Presupunem că $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, adică, $\models \varphi$ și $\models \varphi \rightarrow \psi$, deci $\models \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$. Aplicăm (2) pentru a obține că $\models \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$. □

96

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare și $v \in V$ o variabilă.

Definim

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar, $e^+(v^e) = 1$.

Pentru orice mulțime $W = \{x_1, \dots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \dots, x_k^e\}.$$

Pentru orice $a \in \{0, 1\}$, definim evaluarea $e_{v \mapsto a} : V \rightarrow \{0, 1\}$ prin

$$e_{v \mapsto a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{dacă } x \neq v \\ a & \text{dacă } x = v. \end{cases}$$

Propoziția 1.70

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ ,

- (i) Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \varphi$.
- (ii) Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

Dem.: Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $\text{Var}(\varphi)^e = \{v^e\}$ și $e^+(v) = e(v)$.
Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.
Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.
- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$, deci $\text{Var}(\varphi)^e = \text{Var}(\psi)^e$.
Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ , $\text{Var}(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \varphi$.
Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ , $\text{Var}(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \psi$.
Deoarece $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$ ((41) din Propoziția 1.66), putem aplica (MP) pentru a obține $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$.

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$. Atunci $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi) \cup \text{Var}(\chi)$, deci $\text{Var}(\psi)^e, \text{Var}(\chi)^e \subseteq \text{Var}(\varphi)^e$.

Dacă $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$. Avem

$\text{Var}(\psi)^e \vdash \psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$\text{Var}(\chi)^e \vdash \neg\chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$\text{Var}(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$	$\text{Var}(\psi)^e, \text{Var}(\chi)^e \subseteq \text{Var}(\varphi)^e$ și P. 1.54.(i)
$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$	(43) din Propoziția 1.66
$\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$	Propoziția 1.54.(iv).

Dacă $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$ sau $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obținem

$\text{Var}(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$\text{Var}(\psi)^e \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	(38) din P. 1.66 și P. 1.54.(ii)
$\text{Var}(\psi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	(MP)
$\text{Var}(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	$\text{Var}(\psi)^e \subseteq \text{Var}(\varphi)^e$ și P. 1.54.(i).

În al doilea caz, obținem

$\text{Var}(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$\text{Var}(\chi)^e \vdash \chi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	(A1) și Propoziția 1.53.(i)
$\text{Var}(\chi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	(MP)
$\text{Var}(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	$\text{Var}(\chi)^e \subseteq \text{Var}(\varphi)^e$ și P. 1.54.(i). □

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție efectivă a unei demonstrații a lui φ sau $\neg\varphi$ din premisele $\text{Var}(\varphi)^e$.

Teorema 1.71 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ ,

$$\vdash \varphi \quad \text{dacă} \quad \models \varphi.$$

Dem.: " $\Rightarrow$ " Se aplică Teorema de corectitudine 1.69.

" $\Leftarrow$ " Fie φ o tautologie și $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducție după k următoarea proprietate:

$$(*) \quad \text{pentru orice } k \leq n, \text{ pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \\ \{x_1^e, \dots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Pentru $k = n$, $(*)$ ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziția 1.70, obținem că

$$\text{Var}(\varphi)^e = \{x_1^e, \dots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

101

$k \Rightarrow k + 1$. Presupunem că $(*)$ este adevărată pentru k și fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \mapsto \neg e(x_{n-k})}$. Așadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n-k-1\}$ și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k}^e & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k}^e & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din $(*)$ pentru e și e' , obținem

$$\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 1.67 cu $\Gamma := \{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\}$ și $\psi := x_{n-k}^e$ pentru a conclud că $\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. □

102

Propoziția 1.72

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$. Presupunem că $\varphi \sim \psi$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Observăm că

$$\varphi \sim \psi \iff \models \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \models \psi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 1.16

$$\iff \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

Teorema de completitudine.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, rezultă din Propoziția 1.54.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obține că $\Gamma \vdash \psi$.

" $\Leftarrow$ " Similar. □

103

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.73

► O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).

Notăție: $e \models \Gamma$.

► Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.

► Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

Notății: Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $\text{Mod}(\Gamma)$.

► $\text{Mod}(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} \text{Mod}(\varphi)$.

104

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 1.74

O formulă φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă

$\text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$. **Notăție:** $\Gamma \models \varphi$.

Dacă φ **nu** este consecință semantică a lui Γ , scriem $\Gamma \not\models \varphi$.

Notăm cu $\text{Cn}(\Gamma)$ mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ .
Așadar,

$$\text{Cn}(\Gamma) = \{\varphi \in \text{Form} \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Definiția 1.75

- Δ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $\text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\Delta)$.

Notăție: $\Gamma \models \Delta$.

- Γ și Δ sunt **(logic) echivalente** dacă $\text{Mod}(\Gamma) = \text{Mod}(\Delta)$.

Notăție: $\Gamma \sim \Delta$.

105

Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

Observație

- $\psi \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \{\varphi\}$.
- $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 1.76

- $\text{Mod}(\emptyset) = \text{Fun}(V, \{0, 1\})$, adică orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.
- $\text{Cn}(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \models \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

106

Propoziția 1.77

Fie Γ o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă φ .
- (iii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ .
- (iv) $\Gamma \models \perp$.

Dem.: Exercițiu ușor.

107

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

Notății

- $\Gamma \not\models \varphi$ $:\Leftrightarrow$ φ nu este Γ -teoremă
- $\not\models \varphi$ $:\Leftrightarrow$ φ nu este teoremă
- $\Gamma \not\models \varphi$ $:\Leftrightarrow$ φ nu este consecință semantică a lui Γ
- $\not\models \varphi$ $:\Leftrightarrow$ φ nu este tautologie.

108

Definiția 1.78

Fie Γ o mulțime de formule.

- ▶ Γ este **consistentă** dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.
- ▶ Γ este **inconsistentă** dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ .

Observație

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- ▶ Dacă Δ este consistentă, atunci și Γ este consistentă.
- ▶ Dacă Γ este inconsistentă, atunci și Δ este inconsistentă.

109

Propoziția 1.79

- (i) $\emptyset$ este consistentă.
- (ii) Mulțimea teoremelor este consistentă.

Dem.:

- (i) Dacă $\vdash \perp$, atunci, conform Teoremei de corectitudine 1.69, ar rezulta că $\models \perp$, o contradicție. Așadar $\not\vdash \perp$, deci $\emptyset$ este consistentă.
- (ii) Aplicând Propoziția 1.54.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obținem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ ,
 $\vdash \varphi$ ddacă $Thm \vdash \varphi$.
 Din (i) rezultă că Thm este consistentă. □

110

Propoziția 1.80

Pentru o mulțime de formule Γ sunt echivalente:

- (i) Γ este inconsistentă.
- (ii) Pentru orice formulă ψ , $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.
- (iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.
- (iv) $\Gamma \vdash \perp$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

111

Teorema 1.81 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule Γ ,

$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Teorema 1.82 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

Observație

Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente.

112

LOGICA DE ORDINUL ÎNTÂI

113

Limbaje de ordinul I

Definiția 2.1

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
 - ▶ conectorii $\neg$ și $\rightarrow$;
 - ▶ paranteze: $(,)$;
 - ▶ simbolul de egalitate $=$;
 - ▶ cuantificatorul universal $\forall$;
 - ▶ o mulțime $\mathcal{R}$ de simboluri de relații;
 - ▶ o mulțime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcții;
 - ▶ o mulțime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;
 - ▶ o funcție aritate $\text{ari} : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.
- ▶ $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{ari})$.
- ▶ τ se numește **signatura** lui $\mathcal{L}$ sau **vocabularul** lui $\mathcal{L}$ sau **alfabetul** lui $\mathcal{L}$ sau **tipul de similaritate** al lui $\mathcal{L}$

114

Limbaje de ordinul I

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea $\text{Sim}_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui $\mathcal{L}$ este

$$\text{Sim}_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc **simboluri ne-logice**.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc **simboluri logice**.

- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \dots$, simbolurile de relații cu $P, Q, R, \dots$, simbolurile de funcții cu $f, g, h, \dots$ și simbolurile de constante cu $c, d, e, \dots$

- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m :=$ mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m ;

$\mathcal{R}_m :=$ mulțimea simbolurilor de relații de aritate m .

115

Limbaje de ordinul I

Definiția 2.2

Mulțimea $\text{Expr}_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ .

Definiția 2.3

Fie $\theta = \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$, unde $\theta_i \in \text{Sim}_{\mathcal{L}}$ pentru orice i .

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește **(i, j) -subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este **(i, j) -subexpresia** lui θ ;

Notăm cu $\text{Var}(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ .

116

Definiția 2.4

Termenii lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:

- (T0) Orice variabilă este termen.
- (T1) Orice simbol de constantă este termen.
- (T2) Dacă $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni, atunci $ft_1 \dots t_m$ este termen.
- (T3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt termeni.

- ▶ Mulțimea termenilor se notează $Term_{\mathcal{L}}$.
- ▶ Termeni: $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \dots$

Definiția 2.5

Un termen t se numește **închis** dacă $Var(t) = \emptyset$.

117

Definiție alternativă

Mulțimea $Term_{\mathcal{L}}$ a **termenilor** lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- ▶ orice variabilă este element al lui Γ ;
- ▶ orice simbol de constantă este element al lui Γ ;
- ▶ dacă $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.

118

Citire unică (Unique readability)

Dacă t este un termen, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $t = v$, unde $v \in V$;
- ▶ $t = c$, unde $c \in \mathcal{C}$;
- ▶ $t = ft_1 \dots t_m$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni ai lui $\mathcal{L}$.

Mai mult, scrierea lui t sub una din aceste forme este unică.

- ▶ demonstrații tehnice: [Monk, Mathematical Logic](#), Springer, 1976

119

Propoziția 2.6 (Principiul inducției pe termeni)

Fie Γ o mulțime de termeni care are următoarele proprietăți:

- ▶ Γ conține variabilele și simbolurile de constante;
- ▶ dacă $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Term_{\mathcal{L}}$.

Inducția pe termeni este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate **P**: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor termenilor care satisfac **P** și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $\Gamma = Term_{\mathcal{L}}$.

120

Propoziția 2.7 (Principiul recursiei pe termeni)

Fie D o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \cup \mathcal{C} \rightarrow D,$$

$$G_f : D^m \times \text{Term}_{\mathcal{L}}^m \rightarrow D \text{ pentru orice } m \in \mathbb{N}^*, f \in \mathcal{F}_m.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Term}_{\mathcal{L}} \rightarrow D$$

care satisface următoarele proprietăți:

- (i) $F(t) = G_0(t)$ pentru orice $t \in V \cup \mathcal{C}$.
- (ii) $F(ft_1 \dots t_m) = G_f(F(t_1), F(t_2), \dots, F(t_m), t_1, \dots, t_m)$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni ai lui $\mathcal{L}$.

121

Definiția 2.8

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- ▶ $(s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $(Rt_1 \dots t_m)$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni.

Notăție

Mulțimea formulelor atomice se notează $\text{AtomicForm}_{\mathcal{L}}$.

122

Definiția 2.9

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:

- (F0) Orice formulă atomică este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F3) Dacă φ este formulă, atunci $(\forall x\varphi)$ este formulă pentru orice variabilă x .
- (F4) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.

Notății

- ▶ Mulțimea formulelor se notează $\text{Form}_{\mathcal{L}}$.
- ▶ Formule: $\varphi, \psi, \chi, \dots$

123

Definiție alternativă

Mulțimea $\text{Form}_{\mathcal{L}}$ a **formulelor** lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- ▶ orice formulă atomică este element al lui Γ ;
- ▶ Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\rightarrow$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\forall x$ (pentru orice variabilă x), adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\forall x\varphi) \in \Gamma$ pentru orice variabilă x .

124

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = (s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $\varphi = (Rt_1 \dots t_m)$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule;
- ▶ $\varphi = (\forall x\psi)$, unde x este variabilă și ψ este formulă.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

- ▶ demonstrații tehnice: [Monk, Mathematical Logic](#), Springer, 1976

125

Propoziția 2.10 (Principiul inducției pe formule)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶ Γ conține toate formulele atomice;
- ▶ Γ este închisă la $\neg, \rightarrow$ și $\forall x$ (pentru orice variabilă x).

Atunci $\Gamma = \text{Form}_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate **P**: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac **P** și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $\Gamma = \text{Form}_{\mathcal{L}}$.

126

Propoziția 2.11 (Principiul recursiei pe formule)

Fie D o mulțime și funcțiile

$$\begin{aligned} G_{\neg} : D \times \text{Form}_{\mathcal{L}} &\rightarrow D, & G_{\rightarrow} : D^2 \times \text{Form}_{\mathcal{L}}^2 &\rightarrow D, \\ G_0 : \text{AtomicForm}_{\mathcal{L}} &\rightarrow D, & G_{\forall} : D \times V \times \text{Form}_{\mathcal{L}} &\rightarrow D. \end{aligned}$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow D$$

care satisface următoarele proprietăți:

- (i) $F(\varphi) = G_0(\varphi)$ pentru orice formulă atomică φ .
- (ii) $F((\neg\varphi)) = G_{\neg}(F(\varphi), \varphi)$ pentru orice formulă φ .
- (iii) $F((\varphi \rightarrow \psi)) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi), \varphi, \psi)$ pentru orice formule φ, ψ .
- (iv) $F((\forall x\varphi)) = G_{\forall}(F(\varphi), x, \varphi)$ pentru orice formulă φ și orice variabilă x .

127

Conectori derivați

Conectorii $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ și **cuantificatorul existențial** $\exists$ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &:= ((\neg\varphi) \rightarrow \psi) \\ \varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)) \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \\ \exists x\varphi &:= (\neg\forall x(\neg\varphi)). \end{aligned}$$

128

Notății

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$

$$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

► $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.

► $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.

În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $s = t$, $Rt_1 \dots t_m$, $\forall x \varphi$, $\neg \varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$. Pe de altă parte, scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.

Pentru a reduce din folosirea parantezelor, presupunem următoarele:

- Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ au precedență mai mare decât ceilalți conectori. Așadar, $\forall x \varphi \rightarrow \psi$ este $(\forall x \varphi) \rightarrow \psi$ și nu $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.
- $\neg$ are precedență mai mare decât $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$.
- $\wedge$, $\vee$ au precedență mai mare decât $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

- Scriem uneori $f(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $ft_1 \dots t_m$ și $R(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \dots t_m$.
- Simbolurile de funcții sau relații de aritate 1 se numesc **unare**.
- Simbolurile de funcții sau relații de aritate 2 se numesc **binare**.
- Dacă f este un simbol de funcție binară scriem $t_1 ft_2$ în loc de $ft_1 t_2$.
- Analog, dacă R este un simbol de relație binară, scriem $t_1 Rt_2$ în loc de $Rt_1 t_2$.

Vom identifica un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și vom scrie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

Definiția 2.12

O $\mathcal{L}$ -**structură** este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- A este o mulțime nevidă;
- $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A ; dacă f are aritatea m , atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \rightarrow A$;
- $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A ; dacă R are aritatea m , atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;
- $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.
- A se numește **universul** structurii $\mathcal{A}$. **Notăție:** $A = |\mathcal{A}|$
- $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește **denotația** sau **interpretarea** lui f (respectiv R , c) în $\mathcal{A}$.

Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

$$\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset.$$

$\mathcal{L}_=$ -structurile sunt mulțimile nevide.

Acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$

133

Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{<\}$; $<$ este simbol de relație binar, adică are aritatea 2;
- $\mathcal{F} = \{+, \dot{+}, \dot{S}\}$; $+$, $\dot{+}$ sunt simboluri de operații binare și $\dot{S}$ este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (<; +, \dot{+}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (<, +, \dot{+}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$ -structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$<^{\mathcal{N}} = <, \quad +^{\mathcal{N}} = +, \quad \dot{+}^{\mathcal{N}} = \cdot, \quad \dot{S}^{\mathcal{N}} = S, \quad \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$ -structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

134

Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar;
- $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$.

$\mathcal{L}_R$ -structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară.

- Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\leq$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $<$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul $\dot{E}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- Dacă suntem interesați de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\in$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.

135

Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{*, \dot{-}^1\}$; $*$ simbol binar, $\dot{-}^1$ simbol unar;
- $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; *, \dot{-}^1; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (*, \dot{-}^1, \dot{e})$.

Exemple naturale de $\mathcal{L}_{Gr}$ -structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$.
Prin urmare, $*^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{-}^1{}^{\mathcal{G}} = ^{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{+, \dot{-}\}$; $+$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (+, \dot{-}, \dot{0})$.

136

SEMANTICA

137

Semantica

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură.

Definiția 2.13

O **interpretare** sau **evaluare** a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \rightarrow A$.

În continuare, $e : V \rightarrow A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 2.14 (Interpretarea termenilor)

Prin recursie pe termeni se definește **interpretarea** $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e :

- ▶ dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;
- ▶ dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;
- ▶ dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.

138

Exemplu

Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ și $\mathcal{L}_{ar}$ -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$ și

$$t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y).$$

Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$.

Dem.: Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\ &= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\ &= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))). \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

139

Semantica

Prin recursie pe formule se definește **interpretarea**

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a formulei φ sub evaluarea e .

$$\begin{aligned} (s = t)^{\mathcal{A}}(e) &= \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases} \\ (Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= \begin{cases} 1 & \text{dacă } (t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases} \end{aligned}$$

140

Negația și implicația

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$$\rightarrow: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1$
 $\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e)$.

141

Notăție

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretare $e_{x \mapsto a} : V \rightarrow A$ prin

$$e_{x \mapsto a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

142

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 2.15

Fie φ o formulă. Spunem că:

- ▶ e **satisfacă** φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$.
Notăție: $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- ▶ e **nu satisfacă** φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
Notăție: $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- ▶ $(\mathcal{A}, e)$ este **model** al lui φ dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Definiția 2.16

Fie φ o formulă. Spunem că:

- ▶ φ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- ▶ φ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie** dacă φ nu este satisfiabilă.

143

Corolar 2.17

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $\mathcal{A} \models (\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ implică } \mathcal{A} \models \psi[e]$
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$.
- (iv) $\mathcal{A} \not\models (\forall x \varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\models \varphi[e_{x \mapsto a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

144

Propoziția 2.18

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $(\varphi \vee \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \vee \psi^A(e)$.
- (ii) $(\varphi \wedge \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \wedge \psi^A(e)$.
- (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \leftrightarrow \psi^A(e)$.
- (iv) $(\exists x \varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^A(e_{x \mapsto a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

$\vee, \wedge, \leftrightarrow: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$,

p	q	$p \vee q$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

145

Propoziția 2.19

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iv) $\mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$.
- (v) $\mathcal{A} \not\models (\exists x \varphi)[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \not\models \varphi[e_{x \mapsto a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] &\iff \mathcal{A} \models (\neg \forall x \neg \varphi)[e] \iff \mathcal{A} \not\models (\forall x \neg \varphi)[e] \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\models (\neg \varphi)[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]. \end{aligned}$$

146

Propoziția 2.20

Pentru orice $n \geq 2$ și orice formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$,

- $\mathcal{A} \models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \varphi_i[e] \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}$.
- $\mathcal{A} \models (\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n)[e] \text{ ddacă există } i \in \{1, \dots, n\} \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi_i[e]$.

Dem.: Exercițiu.

147

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.21

Spunem că φ este **adevărată** într-o $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e: V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ **satisfacă** φ sau că $\mathcal{A}$ este un **model** al lui φ .

Notăție: $\mathcal{A} \models \varphi$

Definiția 2.22

Spunem că φ este formulă **universal adevărată** sau (**logic**) **validă** dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

Notăție: $\models \varphi$

148

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.23

φ și ψ sunt **logic echivalente** dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție: $\varphi \models \psi$

Definiția 2.24

ψ este **consecință semantică** a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \implies \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție: $\varphi \models \psi$

Observație

- (i) $\varphi \models \psi$ ddacă $\models \varphi \rightarrow \psi$.
- (ii) $\varphi \models \psi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

149

Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ și

$$\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \rightarrow (x \dot{<} y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \rightarrow (\dot{<}(x, y) \vee x = y).$$

Pentru orice $\mathcal{L}_{ar}$ -structură $\mathcal{A} = (A, \dot{<}^{\mathcal{A}}, \dot{+}^{\mathcal{A}}, \dot{\times}^{\mathcal{A}}, \dot{S}^{\mathcal{A}}, \dot{0}^{\mathcal{A}})$, și orice interpretare $e : V \rightarrow A$, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{A} \not\models (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff (e(x), \dot{S}^{\mathcal{A}}(e(y))) \notin \dot{<}^{\mathcal{A}} \text{ sau } \\ &\quad \mathcal{A} \models (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models (x = y)[e] \\ &\iff (e(x), \dot{S}^{\mathcal{A}}(e(y))) \notin \dot{<}^{\mathcal{A}} \\ &\quad \text{sau } (e(x), e(y)) \in \dot{<}^{\mathcal{A}} \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff (\text{nu este adevărat că } e(x) \dot{<}^{\mathcal{A}} \dot{S}^{\mathcal{A}}(e(y))) \\ &\quad \text{sau } e(x) \dot{<}^{\mathcal{A}} e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

150

Fie $\mathcal{L}_{ar}$ -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Să se arate că $\mathcal{N} \models \varphi$.

Dem.: Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \varphi[e] &\iff (\text{nu este adevărat că } e(x) \dot{<}^{\mathcal{N}} \dot{S}^{\mathcal{N}}(e(y))) \\ &\quad \text{sau } e(x) \dot{<}^{\mathcal{N}} e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff (\text{nu este adevărat că } e(x) < S(e(y))) \\ &\quad \text{sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff (\text{nu este adevărat că } e(x) < e(y) + 1) \\ &\quad \text{sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y), \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat. Prin urmare, $\mathcal{N} \models \varphi[e]$ pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, adică $\mathcal{N} \models \varphi$.

151

Fie $\mathcal{L}_{ar}$ -structura $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot, S, 0)$, unde

$$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, S(x) = x + 1.$$

Să se arate că $\mathcal{R} \not\models \varphi$.

Dem.: Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{R}$, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \models \varphi[e] &\iff (\text{nu este adevărat că } e(x) \dot{<}^{\mathcal{R}} \dot{S}^{\mathcal{R}}(e(y))) \\ &\quad \text{sau } e(x) \dot{<}^{\mathcal{R}} e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff (\text{nu este adevărat că } e(x) < S(e(y))) \\ &\quad \text{sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff (\text{nu este adevărat că } e(x) < e(y) + 1) \\ &\quad \text{sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

Fie $e : V \rightarrow \mathbb{R}$ a.î. $e(x) = 1,5$ și $e(y) = 1,4$. Atunci $\mathcal{R} \not\models \varphi[e]$.
Prin urmare, $\mathcal{R} \not\models \varphi$.

152

Propoziția 2.25

Pentru orice termeni s, t, u ,

- (i) $\models t = t$;
- (ii) $\models s = t \rightarrow t = s$;
- (iii) $\models s = t \wedge t = u \rightarrow s = u$.

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iii). Notăm, pentru simplitate,

$$\varphi := s = t \wedge t = u \rightarrow s = u.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$. Trebuie să arătăm că $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Obținem

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{A} \models (s = t \wedge t = u)[e] \text{ implică } \mathcal{A} \models (s = u)[e] \\ &\iff (\mathcal{A} \models (s = t)[e] \text{ și } \mathcal{A} \models (t = u)[e]) \text{ implică } \mathcal{A} \models (s = u)[e] \\ &\iff (s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \text{ și } t^{\mathcal{A}}(e) = u^{\mathcal{A}}(e)) \text{ implică } s^{\mathcal{A}}(e) = u^{\mathcal{A}}(e), \end{aligned}$$

ceea ce este evident. 153

$$\begin{aligned} (53): \quad \mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff (\text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]) \\ &\quad \text{și } (\text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}]) \\ &\iff \mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e] \text{ și } \mathcal{A} \models (\forall x\psi)[e] \\ &\iff \mathcal{A} \models (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e]. \end{aligned}$$

(52), (54): Exercițiu. □

Propoziția 2.26

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y ,

$$\neg \exists x\varphi \models \forall x\neg\varphi \quad (51)$$

$$\neg \forall x\varphi \models \exists x\neg\varphi \quad (52)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \quad (53)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \exists x\varphi \vee \exists x\psi \quad (54)$$

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$.

(51):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\neg \exists x\varphi)[e] &\iff \mathcal{A} \not\models (\exists x\varphi)[e] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \not\models \varphi[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models (\neg\varphi)[e_{x \mapsto a}] \\ &\iff \mathcal{A} \models (\forall x\neg\varphi)[e]. \end{aligned}$$

Propoziția 2.27

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y ,

$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \models \forall x(\varphi \vee \psi) \quad (55)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \quad (56)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (57)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (58)$$

$$\forall x\varphi \models \exists x\varphi \quad (59)$$

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (60)$$

$$\forall x\varphi \models \varphi \quad (61)$$

Dem.: Exercițiu. Demonstrăm (57) ca exemplu. Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$.

Avem că $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$,

$\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x \mapsto a}] \iff$ pentru orice $a \in A$,

$\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \iff$

(*) pentru orice $a \in A$, $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a})$.

Similar obținem că $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e] \iff$

(**) $(\forall x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) \leq (\forall x\psi)^{\mathcal{A}}(e)$.

Presupunem (*) și trebuie să demonstrăm (**).

Dacă $(\forall x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0$, (**) este evident.

Presupunem, așadar, că $(\forall x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică

(***) pentru orice $b \in A$, $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto b}) = 1$.

Ne rămâne de arătat că $(\forall x\psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică

pentru orice $c \in A$, $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto c}) = 1$.

Fie $c \in A$. Din (*), avem că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto c}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto c})$, iar din (***),
că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto c}) = 1$. Rezultă că $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto c}) = 1$. $\square$

Notății 2.28

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$. Pentru orice variabile distincte x, y și orice elemente $a, b \in A$, avem că

$$(e_{y \mapsto b})_{x \mapsto a} = (e_{x \mapsto a})_{y \mapsto b}.$$

Notăm valoarea comună $e_{x \mapsto a, y \mapsto b}$. Prin urmare,

$$e_{x \mapsto a, y \mapsto b} : V \rightarrow A, \quad e_{x \mapsto a, y \mapsto b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ și } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

Propoziția 2.29

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile distincte x, y ,

$$\forall x \forall y \varphi \models \forall y \forall x \varphi \quad (62)$$

$$\exists x \exists y \varphi \models \exists y \exists x \varphi \quad (63)$$

$$\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi \quad (64)$$

Dem.: Exercițiu. Demonstrăm (64) ca exemplu. Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$. Avem că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] &\iff \text{există } b \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e_{y \mapsto b}] \\ &\iff \text{există } b \in A \text{ a.î. pentru orice } a \in A, \\ &\quad \mathcal{A} \models \varphi[(e_{y \mapsto b})_{x \mapsto a}]. \end{aligned}$$

Deci, $\mathcal{A} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] \iff (*)$, unde

(*) există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a, y \mapsto b}]$.

Obținem similar că $\mathcal{A} \models (\forall x \exists y \varphi)[e] \iff (**)$, unde

(**) pentru orice $a \in A$ există $c \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a, y \mapsto c}]$.

(*) $\Rightarrow$ (**) Fie b a.î. (*) are loc. Pentru orice $a \in A$ luăm $c := b$. Atunci (**) are loc. $\square$

Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I și de formulă φ a lui $\mathcal{L}$ astfel încât $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$, unde x și y sunt variabile distincte.

Dem.: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\prec, +, \cdot, S, 0)$, $\mathcal{L}_{ar}$ -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară.
Fie

$$\varphi := x \prec y.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\forall x \exists y \varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î.} \\ &\quad \mathcal{N} \models \varphi [e_{x \mapsto n, y \mapsto m}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat (se ia, de pildă, $m := n + 1$). Așadar,

$$\mathcal{N} \models (\forall x \exists y \varphi)[e].$$

161

Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I și de formulă φ a lui $\mathcal{L}$ astfel încât $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$.

Dem.: (continuare) Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ &\quad \text{avem } \mathcal{N} \models \varphi [e_{x \mapsto n, y \mapsto m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ &\quad \text{avem } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este fals. Așadar,

$$\mathcal{N} \not\models (\exists y \forall x \varphi)[e].$$

162

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 2.30

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.
Spunem că $(\mathcal{A}, e)$ este **model** al lui Γ dacă $(\mathcal{A}, e)$ este model al fiecărei formule din Γ , adică

$$\mathcal{A} \models \gamma[e] \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Definiția 2.31

- Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie** dacă Γ nu este satisfiabilă.

163

Definiția 2.32

Fie φ o formulă. Spunem φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$(\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \Gamma \implies (\mathcal{A}, e) \text{ model al lui } \varphi.$$

Notăție: $\Gamma \models \varphi$

Definiția 2.33

Fie Δ o mulțime de formule. Spunem că Δ este **consecință semantică** a lui Γ dacă

$$\Gamma \models \varphi \text{ pentru orice } \varphi \in \Delta.$$

Notăție: $\Gamma \models \Delta$

164

Lema 2.34

- (i) $\models \psi \iff \emptyset \models \psi$;
- (ii) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \models \psi$, atunci $\Delta \models \psi$.
- (iii) Dacă $\Gamma \models \Delta$ și $\Delta \models \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

165

Noțiunile de **tautologie** și **consecință semantică** din logica propozițională se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv, o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectorilor $\neg, \rightarrow$.

Definiția 2.35

O **$\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr** este o funcție $F : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ ,

- ▶ $F(\neg\varphi) = \neg F(\varphi)$;
- ▶ $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$.

Propoziția 2.36

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$, funcția

$$V_{e, \mathcal{A}} : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}, \quad V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr.

166

Definiția 2.37

O formulă φ este **tautologie** dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr F .

Notăție: $\models_{\text{taut}} \varphi$

Exemple de tautologii: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

Propoziția 2.38

Orice tautologie este validă.

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e, \mathcal{A}}$ este $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. $\square$

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu este tautologie.

167

Fie φ, ψ formule.

Definiția 2.39

ψ este **consecință tautologică** a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr F ,

$$F(\varphi) = 1 \implies F(\psi) = 1.$$

Notăție: $\varphi \models_{\text{taut}} \psi$

Definiția 2.40

Două formule φ și ψ sunt **tautologic echivalente** dacă $F(\varphi) = F(\psi)$ pentru orice $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr F .

Notăție: $\varphi \models_{\text{taut}} \psi$

Observație

- (i) $\varphi \models_{\text{taut}} \psi$ ddacă $\models_{\text{taut}} \varphi \rightarrow \psi$.
- (ii) $\varphi \models_{\text{taut}} \psi$ ddacă $(\psi \models_{\text{taut}} \varphi \text{ și } \varphi \models_{\text{taut}} \psi)$ ddacă $\models_{\text{taut}} \psi \leftrightarrow \varphi$.

168

Definiția 2.41

O formulă φ este **consecință tautologică** a unei mulțimi de formule Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$ -evaluare de adevăr F ,

$$F(\gamma) = 1 \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma \implies F(\varphi) = 1.$$

Notăție: $\Gamma \models_{\text{taut}} \varphi$

Propoziția 2.42

Dacă φ este consecință tautologică a lui Γ , atunci $\Gamma \models \varphi$.

Dem.: Fie $(\mathcal{A}, e)$ un model al lui Γ . Atunci $\gamma^{\mathcal{A}}(e) = 1$, deci $V_{e,\mathcal{A}}(\gamma) = 1$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Deoarece φ este consecință tautologică a lui Γ , rezultă că $V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, deci $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$, adică $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. $\square$

169

Definiția 2.43

Fie $\varphi = \varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui $\mathcal{L}$ și x o variabilă.

- ▶ Spunem că variabila x **apare legată pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. $\varphi_i \dots \varphi_j$ este de forma $\forall x \psi$ cu ψ formulă.
- ▶ Spunem că x **apare liberă pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ .
- ▶ x este **variabilă legată** (bounded variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ .
- ▶ x este **variabilă liberă** (free variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ .

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$. Variabile libere: x, y, z . Variabile legate: x .

170

Notăție: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ .

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$\begin{aligned} FV(\varphi) &= \text{Var}(\varphi), & \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\ FV(\neg\varphi) &= FV(\varphi); \\ FV(\varphi \rightarrow \psi) &= FV(\varphi) \cup FV(\psi); \\ FV(\forall x\varphi) &= FV(\varphi) \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

Notăție: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

171

Propoziția 2.44

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$, pentru orice termen t ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{Var}(t)$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.

Dem.: Exercițiu.

172

Propoziția 2.45

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,
pentru orice formulă φ ,
dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci
 $\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$.

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$.

Atunci $Var(t_1) \subseteq FV(\varphi)$, $Var(t_2) \subseteq FV(\varphi)$, deci putem aplica Propoziția 2.44 pentru a obține că

$$t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_1^{\mathcal{A}}(e_2) \quad \text{și} \quad t_2^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_1) \iff t_1^{\mathcal{A}}(e_2) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2) \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

173

- $\varphi = Rt_1 \dots t_m$.

Atunci $Var(t_i) \subseteq FV(\varphi)$ pentru orice $i = 1, \dots, m$ și aplicăm din nou Propoziția 2.44 pentru a obține că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff (t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) \in R^{\mathcal{A}} \\ &\iff (t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) \in R^{\mathcal{A}} \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\psi$.

Deoarece $FV(\psi) = FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2].$$

Rezultă că

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$

174

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Deoarece $FV(\psi), FV(\chi) \subseteq FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \chi[e_2].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \\ &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_2] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

175

- $\varphi = \forall x\psi$ și

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}.$$

Rezultă că pentru orice $a \in A$,

$$e_{1_{x \mapsto a}}(v) = e_{2_{x \mapsto a}}(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\psi).$$

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările $e_{1_{x \mapsto a}}, e_{2_{x \mapsto a}}$ pentru a obține că

$$\text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1_{x \mapsto a}}] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_{2_{x \mapsto a}}].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1_{x \mapsto a}}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{2_{x \mapsto a}}] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

□

176

Propoziția 2.46

Pentru orice formulă φ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (65)$$

$$\varphi \models \forall x\varphi \quad (66)$$

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$.

(65):

$\mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ (aplicând Propoziția 2.45)}$

(66): Exercițiu. $\square$

177

Propoziția 2.47

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi, \quad \forall x(\psi \wedge \varphi) \models \forall x\psi \wedge \varphi \quad (67)$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \forall x\psi, \quad \forall x(\psi \vee \varphi) \models \forall x\psi \vee \varphi \quad (68)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \exists x\psi, \quad \exists x(\psi \wedge \varphi) \models \exists x\psi \wedge \varphi \quad (69)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi, \quad \exists x(\psi \vee \varphi) \models \exists x\psi \vee \varphi \quad (70)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (71)$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (72)$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \models \exists x\psi \rightarrow \varphi \quad (73)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi \quad (74)$$

Dem.: Exercițiu.

178

Demonstrăm (67) ca exemplu. Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$.

$\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \mapsto a}]$
 $\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \iff \text{pentru}$
 orice $a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \text{ (aplicând Propoziția 2.45)}$
 $\iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$
 și $\mathcal{A} \models (\forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \forall x\psi)[e].$ $\square$

179

Definiția 2.48

O formulă φ se numește **enunț** (sentence) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.

Notăție: $Sent_{\mathcal{L}} := \text{mulțimea enunțurilor lui } \mathcal{L}.$

Propoziția 2.49

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 2.45 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. $\square$

Definiția 2.50

O $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ este un **model** al lui φ dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \rightarrow A$. **Notăție:** $\mathcal{A} \models \varphi$

180

Propoziția 2.51

Pentru orice enunțuri φ, ψ ,

- (i) $\mathcal{A} \models \neg \varphi \iff \mathcal{A} \not\models \varphi$.
- (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi \iff \mathcal{A} \models \varphi$ implică $\mathcal{A} \models \psi$
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi$ sau $\mathcal{A} \models \psi$.
- (iii) $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi \iff \mathcal{A} \models \varphi$ și $\mathcal{A} \models \psi$.
- (iv) $\mathcal{A} \models \varphi \vee \psi \iff \mathcal{A} \models \varphi$ sau $\mathcal{A} \models \psi$.
- (v) $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi \iff \mathcal{A} \models \varphi$ ddacă $\mathcal{A} \models \psi$.

Propoziția 2.52

Pentru orice $n \geq 2$ și orice enunțuri $\varphi_1, \dots, \varphi_n$,

- $\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ ddacă $\mathcal{A} \models \varphi_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$.
- $\mathcal{A} \models \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ ddacă există $i \in \{1, \dots, n\}$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi_i$.

181

Fie φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ și Γ o mulțime de enunțuri.

Definiția 2.53

O $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ este un **model** al lui Γ dacă $\mathcal{A} \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$.

Notăție: $\mathcal{A} \models \Gamma$

Γ este **satisfiabilă** ddacă Γ are un model ddacă există o $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma$

$\Gamma \models \varphi$ ddacă pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models \Gamma \implies \mathcal{A} \models \varphi.$$

182

Fie x o variabilă a lui $\mathcal{L}$ și u termen al lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.54

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, definim

$$t_x(u) := \text{expresia obținută din } t \text{ prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui } x \text{ cu } u.$$

Propoziția 2.55

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, $t_x(u)$ este termen al lui $\mathcal{L}$.

183

- Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui x cu u .
- De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\models \forall x \varphi \rightarrow \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x \varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$.

- Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ cu $|A| \geq 2$, avem $\mathcal{A} \models \forall x \varphi$.
- $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.

184

Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 2.56

Spunem că x este **liberă pentru u** în φ sau că u este **substituibil pentru x** în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u , nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y\psi$ nu conține apariții libere ale lui x .

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- ▶ u nu conține variabile;
- ▶ φ nu conține variabile care apar în u ;
- ▶ nici o variabilă din u nu apare legată în φ ;
- ▶ x nu apare în φ ;
- ▶ φ nu conține apariții libere ale lui x .

185

Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ .

Definiția 2.57

$\varphi_x(u) :=$ expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui x cu u .

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o **substituție liberă**.

Propoziția 2.58

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui $\mathcal{L}$.

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

186

Propoziția 2.59

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x ,

(i) pentru orice termen t ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Propoziția 2.60

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u), \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

(ii) $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi, \quad \models \varphi \rightarrow \exists x\varphi.$

(iii) Pentru orice simbol de constantă c ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c), \quad \models \varphi_x(c) \rightarrow \exists x\varphi.$$

187

În general, dacă x și y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie $\mathcal{L}_{ar}$, $\mathcal{N}$ și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ a.î.

$e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

- ▶ $\mathcal{N} \models (x < z)[e]$, deoarece $e(x) = 3 < 4 = e(z)$.
- ▶ Fie $\varphi := (x < z)_x(y) = y < z$. Avem că $\mathcal{N} \not\models \varphi[e]$, deoarece $e(y) = 5 > 4 = e(z)$.

188

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

Propoziția 2.61

Pentru orice formulă φ , variabile distincte x și y astfel încât y nu apare în φ ,

$$\exists x\varphi \models \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \models \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 2.61 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (adică x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.

Definiția 2.62

Pentru orice formulă φ și orice variabile $y_1, \dots, y_k$, **varianta** $y_1, \dots, y_k$ -**liberă** φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- ▶ dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ ;
- ▶ dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;
- ▶ dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, atunci φ' este $\psi' \rightarrow \chi'$;
- ▶ dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w\psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \dots, y_k\} \\ \forall z\psi' & \text{altfel,} \end{cases}$$

unde w este prima variabilă din șirul $v_0, v_1, \dots$, care nu apare în ψ' și nu este printre $y_1, \dots, y_k$.

Definiția 2.63

φ' este **variantă** a lui φ dacă este varianta $y_1, \dots, y_k$ -liberă a lui φ pentru anumite variabile $y_1, \dots, y_k$.

Propoziția 2.64

- (i) Pentru orice formulă φ , dacă φ' este o variantă a lui φ , atunci $\varphi \models \varphi'$.
- (ii) Pentru orice formulă φ și orice termen t , dacă variabilele lui t se află printre $y_1, \dots, y_k$ și φ' este varianta $y_1, \dots, y_k$ -liberă a lui φ , atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.

Definiția 2.65

O formulă care nu conține cuantificatori se numește **liberă de cuantificatori** ("quantifier-free").

Definiția 2.66

O formulă φ este în **formă normală prenex** dacă

$$\varphi = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \dots, x_n$ sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește **matricea** lui φ și $Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n$ este **prefixul** lui φ .

Exemple de formule în formă normală prenex:

- ▶ Formulele libere de cuantificatori
- ▶ Formulele **universale**: $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori
- ▶ Formulele **existențiale**: $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori

Teorema 2.67 (Teorema de formă normală prenex)

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \models \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

193

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conține

- ▶ două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- ▶ un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- ▶ două simboluri de constante c, d .

Fie x, y, z variabile distincte.

194

Exemplul 2.68

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y (g(y, z) = c) \wedge \neg \exists x (f(x) = d)$$

Dem.: Avem

$$\begin{aligned} \varphi &\models \exists y (g(y, z) = c) \wedge \forall x \neg (f(x) = d) && \text{aplicăm (51)} \\ &\models \exists y (g(y, z) = c \wedge \forall x \neg (f(x) = d)) && \text{aplicăm (69)} \\ &\models \exists y \forall x (g(y, z) = c \wedge \neg (f(x) = d)) && \text{aplicăm (67)} \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\varphi^* = \exists y \forall x (g(y, z) = c \wedge \neg (f(x) = d))$$

este o formă normală prenex pentru φ .

195

Exemplul 2.69

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg \forall y (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d).$$

Dem.: Avem că

$$\begin{aligned} \varphi &\models \exists y \neg (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d) && \text{aplicăm (52)} \\ &\models \exists y \neg \exists z (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d) && \text{aplicăm (72)} \\ &\models \exists y \neg \exists z (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) && \text{aplicăm (74)} \\ &\models \exists y \forall z \neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) && \text{aplicăm (51)} \\ &\models \exists y \left(\forall z \neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \right) && \text{aplicăm (69)} \\ &\models \exists y \forall z \left(\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \right) && \text{aplicăm (67)} \end{aligned}$$

196

Exemplul 2.70

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg \forall y (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d).$$

Dem.: (continuare)

$$\varphi \models \exists y \forall z (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d))$$

$$\models \exists y \forall z \forall x (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d)) \text{ aplicăm (67)}$$

$$\models \exists y \forall z \forall x (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists v (P(x, v) \rightarrow f(x) = d))$$

aplicăm Propoziția 2.61, unde v este o variabilă nouă

$$\models \exists y \forall z \forall x \exists v (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d)) \text{ aplicăm (69)}$$

Deci, $\varphi^* = \exists y \forall z \forall x \exists v (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d))$ este o formă normală prenex pentru φ .

197

Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din enunțuri de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducerea de noi simboluri de funcții/constante, numite **simboluri de funcții/constante Skolem**.

Observație

Orice enunț liber de cuantificatori este universal.

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \dots, x_n$ sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

198

Asociem lui φ un enunț universal φ^{Sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$:

Dacă φ este universal, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$.

Altfel, φ are una din formele:

- ▶ $\varphi = \exists x \psi$. Introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi_x(c)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- ▶ $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x \psi$ ($k \geq 1$). Introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\varphi^1 = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi_x(fx_1 \dots x_k)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$.

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ .

Dacă φ^1 este enunț universal, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este enunț universal, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \dots$, până ajungem la un enunț universal și acesta este φ^{Sk} .

φ^{Sk} este o **formă normală Skolem** a lui φ .

199

Exemple

- ▶ Fie θ o formulă liberă de cuantificatori a.î. $FV(\theta) = \{x\}$ și $\varphi = \exists x \theta$. Atunci $\varphi^1 = \theta_x(c)$, unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \theta_x(c)$.
- ▶ Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x \forall y \forall z R(x, y, z)$. Atunci $\varphi^1 = \forall y \forall z (R(x, y, z))_x(c) = \forall y \forall z R(c, y, z)$, unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z R(c, y, z)$.
- ▶ Fie P un simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall y \exists z P(y, z)$. Atunci $\varphi^1 = \forall y (P(y, z))_z(f(y)) = \forall y P(y, f(y))$, unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y P(y, f(y))$.

200

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj care conține un simbol de relație binară R și un simbol de funcție unară f . Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v).$$

$$\varphi^1 = \forall y \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v)_z(g(y))$$

$$= \forall y \forall u \exists v (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v),$$

unde g este un nou simbol de funcție unară

$$\varphi^2 = \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v)_v(h(y, u))$$

$$= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)),$$

unde h este un nou simbol de funcție binară.

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)).$$

201

Teorema 2.71 (Teorema de formă normală Skolem)

Fie φ un enunț în formă normală prenex și φ^{Sk} o formă normală Skolem a sa.

- (i) $\models \varphi^{Sk} \rightarrow \varphi$, deci $\varphi^{Sk} \models \varphi$ în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.
- (ii) φ este satisfiabilă dacă φ^{Sk} este satisfiabilă.

Observație

În general, φ și φ^{Sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

202

Teorii

Notăție: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , notăm

$$Mod(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

Lema 2.72

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ ,

$$(i) \Gamma \models \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi).$$

$$(ii) \Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma).$$

$$(iii) \Gamma \text{ este satisfiabilă} \iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset.$$

Dem.: Exercițiu ușor.

203

Teorii

Definiția 2.73

O **$\mathcal{L}$ -teorie** este o mulțime T de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \models \varphi \implies \varphi \in T.$$

Definiția 2.74

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , **teoria generată de Γ** este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \models \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

204

Propoziția 2.75

Fie Γ o mulțime de enunțuri.

- (i) $\text{Mod}(\Gamma) = \text{Mod}(\text{Th}(\Gamma))$.
- (ii) $\text{Th}(\Gamma)$ este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem.: Exercițiu.

- O teorie prezentată ca $\text{Th}(\Gamma)$ se numește **teorie axiomatică** sau teorie prezentată **axiomatic**. Γ se numește mulțime de **axiome** pentru $\text{Th}(\Gamma)$.
- Orice teorie poate fi prezentată axiomatice, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

205

Definiția 2.76

O teorie T este **finit axiomatizabilă** dacă $T = \text{Th}(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ .

Definiția 2.77

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$ -structuri este **axiomatizabilă** dacă $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ . Spunem și că Γ **axiomatizează** $\mathcal{K}$.

Definiția 2.78

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$ -structuri este **finit axiomatizabilă** dacă $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma)$ pentru o mulțime **finită** de enunțuri Γ .

206

Exemple - Teoria egalității

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \dots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 2.79

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 2$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$.

207

Exemple - Teoria egalității

Notății

Fie $n \geq 1$.

- $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- $\exists^=n := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziția 2.80

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \exists^{\leq n} &\iff \mathcal{A} \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\ \mathcal{A} \models \exists^=n &\iff \mathcal{A} \text{ are exact } n \text{ elemente.} \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.81

Fie $T := \text{Th}(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models T \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\} \iff \mathcal{A} \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

208

Exemple - Teoria grafurilor

Un **graf** este o pereche $G = (V, E)$ de mulțimi a.î. E este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui V . Elementele lui V se numesc **vârfuri**, iar elementele lui E se numesc **muchii**.

$$\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$$

$\mathcal{L}_{Graf}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$(IREFL) := \forall x \neg \dot{E}(x, x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)).$$

Definiție

Teoria grafurilor este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt grafurile.
- ▶ Γ axiomatizează clasa grafurilor. Prin urmare, clasa grafurilor este finit axiomatizabilă.

209

Exemple - Teoria ordinii parțiale

$$\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$$

$\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (ANTISIM), (TRANZ)\}$, unde

$$(REFL) := \forall x (x \dot{\leq} x)$$

$$(ANTISIM) := \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z)$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor parțial ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor parțial ordonate este finit axiomatizabilă.

210

Exemple - Teoria ordinii totale

Fie $\Gamma := \{(ANTISIM), (TRANZ), (TOTAL)\}$, unde

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \vee y \dot{\leq} x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile total ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor total ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor total ordonate este finit axiomatizabilă.

211

Exemple - Teoria ordinii stricte

$$\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$$

$\mathcal{L}_{\dot{<}}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ)\}$, unde

$$(IREFL) := \forall x \neg (x \dot{<} x)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z)$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor strict ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor strict ordonate este finit axiomatizabilă.

212

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)\}$, unde

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x = y \vee x < y \vee y < x)$$

$$(DENS) := \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)).$$

Definiție

Teoria ordinii dense este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor dens ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor dens ordonate este finit axiomatizabilă.

213

$$\mathcal{L}_{\equiv} = (\equiv, \emptyset, \emptyset) = (\equiv)$$

- ▶ $\mathcal{L}_{\equiv}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (SIM), (TRANZ)\}$, unde

$$(REFL) := \forall x (x \equiv x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y (x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ Fie $\mathcal{K}$ clasa structurilor $(A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație de echivalență pe A . Avem că $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$, așadar Γ axiomatizează $\mathcal{K}$. Prin urmare, $\mathcal{K}$ este finit axiomatizabilă.

214

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y (\neg(x = y) \wedge x \equiv y \wedge \forall z (z \equiv x \rightarrow (z = x \vee z = y))),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.

215

Teorema 2.82 (Teorema de compacitate)

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- ▶ unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi

216

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 2.83

Clasa $\mathcal{L}$ -structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

() pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.*

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură finită a.î. $|\mathcal{A}| \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$ și $\mathcal{A} \models \Gamma$ deoarece $\mathcal{A}$ este finită.

217

Prin urmare, $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \models \Delta_0$. Așadar, Δ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model $\mathcal{B}$.

Deoarece $\mathcal{B} \models \Gamma$, $\mathcal{B}$ este finită.

Deoarece $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.

Am obținut o contradicție. □

Corolar 2.84

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{=}$.

218

Propoziția 2.85

Clasa $\mathcal{L}$ -structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu $\mathcal{K}_{Inf}$ clasa $\mathcal{L}$ -structurilor infinite.

Conform Propoziției 2.81, pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.

219

Presupunem că $\mathcal{K}_{Inf}$ este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\varphi)$.

Rezultă că pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \text{ este finită} \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa $\mathcal{L}$ -structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 2.83. □

Corolar 2.86

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{=}$.

220

Propoziția 2.87

Fie Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci Γ are un model infinit.

Dem.: Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit $\mathcal{A}$ a.î. $|A| \geq m$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$, deci $\mathcal{A} \models \Delta_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Δ are un model $\mathcal{B}$. Prin urmare, $\mathcal{B}$ este un model infinit al lui Γ . $\square$

221

Propoziția 2.88

Dacă un enunț φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$ -structură infinită, atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$ -structură finită de cardinal $\geq m$.

Dem.: Presupunem că nu e adevărat. Fie $\Gamma := \{\neg\varphi\}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$. Aplicând Propoziția 2.87, rezultă că Γ are un model infinit $\mathcal{A}$. Prin urmare, $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, ceea ce contrazice ipoteza. $\square$

222

Definiția 2.89

Fie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}; \text{ari}_{\mathcal{L}})$ și $\mathcal{L}^+ = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}; \text{ari}_{\mathcal{L}^+})$ două limbaje. Spunem că $\mathcal{L}^+$ este **extensie** a lui $\mathcal{L}$ sau că $\mathcal{L}$ este **sublimbaj** al lui $\mathcal{L}^+$ dacă

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}$$

și $\text{ari}_{\mathcal{L}}$ este restricția lui $\text{ari}_{\mathcal{L}^+}$ la $\mathcal{R}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.

Notăție: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$

Definiția 2.90

Spunem că $\mathcal{L}^+$ este o **extensie prin constante** a lui $\mathcal{L}$ dacă

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}.$$

Exemple

- $\mathcal{L} = \subseteq \mathcal{L}$ pentru orice limbaj $\mathcal{L}$
- $\mathcal{L}_{\prec} = (\prec) \subseteq (\prec, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}) \subseteq \mathcal{L}_{ar} = (\prec, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$

223

Dacă $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, atunci orice termen (formulă) din $\mathcal{L}$ este termen (formulă) în $\mathcal{L}^+$.

Definiția 2.91

Fie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $\mathcal{A}^+$ o $\mathcal{L}^+$ -structură.

Spunem că $\mathcal{A}$ este **$\mathcal{L}$ -redușă** lui $\mathcal{A}^+$ sau că $\mathcal{A}^+$ este **$\mathcal{L}^+$ -extensie** lui $\mathcal{A}$ dacă

- ▶ $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^+|$;
- ▶ pentru orice $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$, $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}^+}$;
- ▶ pentru orice $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}^+}$;
- ▶ pentru orice $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}^+}$.

Notăție: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \upharpoonright \mathcal{L}$

Exemplu

$(\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ are redusele $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{N}, S, 0)$, $(\mathbb{N}, <)$.

224

Fie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură, $A = |\mathcal{A}|$ și $\mathcal{A}^+$ o $\mathcal{L}^+$ -extensie a lui $\mathcal{A}$.

Propoziția 2.92

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow A$, termen t al lui $\mathcal{L}$ și formulă φ a lui $\mathcal{L}$,

$$t^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}^+}(e) \quad \text{și} \quad \mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A}^+ \models \varphi[e].$$

Corolar 2.93

Pentru orice enunț φ al lui $\mathcal{L}$, $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{A}^+ \models \varphi$.

Propoziția 2.94

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ a lui $\mathcal{L}$,

- (i) $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A}^+ \models \Gamma$.
- (ii) $Th_{\mathcal{L}}(\Gamma) = Sen_{\mathcal{L}} \cap Th_{\mathcal{L}^+}(\Gamma)$.

225

Considerăm limbajul $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, unde $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare, $\dot{S}$ este simbol de operație unară și $\dot{0}$ este simbol de constantă.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim prin inducție $\mathcal{L}$ -termenul $\Delta(n)$ astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n+1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie $\mathcal{L}$ -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. Atunci $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 2.95

O $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ se numește **non-standard** dacă există $a \in A$ a.î. $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de element a se numește **element non-standard**.

226

Teoria lui $\mathcal{N}$ se definește astfel:

$$Th(\mathcal{N}) := \{\varphi \in Sen_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{N} \models \varphi\}.$$

Se poate demonstra ușor că $Th(\mathcal{N})$ este o teorie.

Teorema 2.96

Există un model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$.

Dem.: Fie c un simbol de constantă nou, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c\}$ și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}^+}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \dots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$

227

Fie $n_0 > \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Considerăm extensia $\mathcal{N}^+$ a lui $\mathcal{N}$ la $\mathcal{L}^+$ definită astfel: $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$. Atunci $\mathcal{N}^+ \models \Gamma_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{A}^+ = (A, +, \times, S, 0, c^{\mathcal{A}^+}).$$

Prin urmare,

$$\mathcal{A}^+ \models Th(\mathcal{N}) \quad \text{și} \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \quad c^{\mathcal{A}^+} \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}^+}.$$

Fie $\mathcal{L}$ -structura

$$\mathcal{A} = (A, +, \times, S, 0), \quad a := c^{\mathcal{A}^+} \in A.$$

Deoarece $\mathcal{A}^+ \models Th(\mathcal{N})$ și $Th(\mathcal{N}) \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$, avem că $\mathcal{A} \models Th(\mathcal{N})$. Cum $\Delta(n)^{\mathcal{A}^+} = \Delta(n)^{\mathcal{A}}$, avem că $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că a este element non-standard al lui $\mathcal{A}$. Deci, $\mathcal{A}$ este model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$. □

228

Definiția 2.97

Fie A o mulțime nevidă. O relație de **bună ordonare** pe A este o relație de ordine totală $<$ pe A cu proprietatea că orice submulțime nevidă a lui A are minim.

Spunem că $(A, <)$ este mulțime **bine ordonată**.

Exemple

$(\mathbb{N}, <)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, <)$ nu este bine ordonată.

229

Propoziția 2.98

Clasa mulțimilor bine ordonate nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{<}$.

Dem.: Fie $\mathcal{K}$ clasa $\mathcal{L}_{<}$ -structurilor $\mathcal{A} = (A, <)$ a.î. $(A, <)$ este bine ordonată. Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{K}$ este axiomatizabilă, deci că

există Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}_{<}$ a.î. $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma)$.

Fie $\mathcal{L}^+$ extensia lui $\mathcal{L}_{<}$ obținută prin adăugarea simbolurilor de constantă c_n , $n \in \mathbb{N}$. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}^+}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in I\}, \text{ unde } I \subseteq \mathbb{N} \text{ este finită} \\ &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n = 0, \dots, M\} \text{ pentru un } M \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

230

Fie $(A, <)$ o mulțime infinită bine ordonată. Definim

$$\begin{aligned} a_{M+1} &:= \min A, \\ a_M &:= \min A \setminus \{a_{M+1}\}, \\ a_{M-1} &:= \min A \setminus \{a_{M+1}, a_M\}, \\ &\vdots \\ a_0 &:= \min A \setminus \{a_{M+1}, a_M, \dots, a_1\}. \end{aligned}$$

Atunci $a_{M+1} < a_M < \dots < a_0$.

Fie $\mathcal{A}^+$ extensia lui $\mathcal{A} = (A, <)$ la $\mathcal{L}^+$ obținută astfel:

$$c_0^{\mathcal{A}^+} = a_0, \dots, c_{M+1}^{\mathcal{A}^+} = a_{M+1}, \quad c_n^{\mathcal{A}^+} \text{ arbitrar pentru } n > M+1.$$

Atunci $\mathcal{A}^+ \models \Delta_0$.

231

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

are un model

$$\mathcal{B}^+ = (B, <, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots),$$

deci $c_n^{\mathcal{B}^+} = b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $\mathcal{L}_{<}$ -structura

$$\mathcal{B} = (B, <).$$

Deoarece $\mathcal{B}^+ \models \Gamma$ și $\Gamma \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}_{<}}$, avem că $\mathcal{B} \models \Gamma$. Prin urmare, $(B, <)$ este bine ordonată.

Deoarece $\mathcal{B}^+ \models \{c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ rezultă că $b_{n+1} < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare,

$$S := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{nu are minim.}$$

Dar S este o submulțime nevidă a lui B . Am obținut o contradicție.

□

232

Definiția 2.99

Mulțimea $Axm_{\mathcal{L}} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ a **axiomelor (logice)** ale lui $\mathcal{L}$ constă din:

- (i) toate tautologiile.
- (ii) formulele de forma

$$t = t, \quad s = t \rightarrow t = s, \quad s = t \wedge t = u \rightarrow s = u,$$
 pentru orice termeni s, t, u .
- (iii) formulele de forma

$$t_1 = u_1 \wedge \dots \wedge t_m = u_m \rightarrow ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m,$$

$$t_1 = u_1 \wedge \dots \wedge t_m = u_m \rightarrow (Rt_1 \dots t_m \leftrightarrow Ru_1 \dots u_m),$$
 pentru orice $m \geq 1, f \in \mathcal{F}_m, R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni t_i, u_i ($i = 1, \dots, m$).
- (iv) formulele de forma

$$\varphi_x(t) \rightarrow \exists x \varphi,$$
 unde $\varphi_x(t)$ este o substituție liberă (**$\exists$ -axiomele**).

233

Definiția 2.100

Regulile de deducție (sau **inferență**) sunt următoarele: pentru orice formule φ, ψ ,

- (i) din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (**modus ponens** sau (**MP**)):

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

- (ii) dacă $x \notin FV(\psi)$, atunci din $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă $\exists x \varphi \rightarrow \psi$ (**$\exists$ -introducerea**):

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x \varphi \rightarrow \psi} \text{ dacă } x \notin FV(\psi).$$

234

Fie Γ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.101

Γ -teoremele lui $\mathcal{L}$ sunt formulele definite astfel:

- ($\Gamma 0$) Orice axiomă logică este Γ -teoremă.
- ($\Gamma 1$) Orice formulă din Γ este Γ -teoremă.
- ($\Gamma 2$) Dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ sunt Γ -teoreme, atunci ψ este Γ -teoremă.
- ($\Gamma 3$) Dacă $\varphi \rightarrow \psi$ este Γ -teoremă și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\exists x \varphi \rightarrow \psi$ este Γ -teoremă.
- ($\Gamma 4$) Numai formulele obținute aplicând regulile ($\Gamma 0$) ($\Gamma 1$), ($\Gamma 2$) și ($\Gamma 3$) sunt Γ -teoreme.

Dacă φ este Γ -teoremă, atunci spunem și că φ este **dedusă din ipotezele** Γ .

235

Notății

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \varphi$ este Γ -teoremă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

Definiția 2.102

O formulă φ se numește **teoremă (logică)** a lui $\mathcal{L}$ dacă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Reformulând condițiile din definiția Γ -teoremelor folosind notația $\vdash$, obținem

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ , au loc următoarele:

- (i) Dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$;
- (ii) Dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$;
- (iii) Dacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ și $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.
- (iv) Dacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$ și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \exists x \varphi \rightarrow \psi$.

236

Definiția 2.103

O Γ -demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) a lui $\mathcal{L}$ este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ astfel încât pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ astfel încât $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$;
- (iv) există $j < i$ astfel încât
 $\theta_j = \varphi \rightarrow \psi$ și $\theta_i = \exists x \varphi \rightarrow \psi$, unde $x \notin FV(\psi)$.

O $\emptyset$ -demonstrație se va numi simplu **demonstrație**.

237

Definiția 2.104

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau **demonstrație a lui φ din ipotezele Γ** este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ astfel încât $\theta_n = \varphi$.

Propoziția 2.105

Fie Γ o mulțime de formule. Pentru orice formulă φ ,

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ ddacă există o Γ -demonstrație a lui φ .

238

Fie Γ o mulțime de formule.

Teorema 2.106 (Teorema Tautologiei (Post))

Fie $\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ astfel încât

- (i) ψ este consecință tautologică a mulțimii $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.
- (ii) $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_2, \dots, \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$.

Atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

Teorema 2.107 (Teorema Deducției)

Fie ψ o formulă și φ un **enunț**. Atunci

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ ddacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$.

Propoziția 2.108

Pentru orice formulă φ și orice variabilă x ,

$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \forall x \varphi$.

239

Definiția 2.109

Fie φ o formula cu $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$. **Închiderea universală a lui φ** este enunțul

$$\overline{\forall \varphi} := \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi.$$

Notății 2.110

$\overline{\forall \Gamma} := \{\overline{\forall \psi} \mid \psi \in \Gamma\}$.

Propoziția 2.111

Pentru orice formulă φ ,

$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \overline{\forall \varphi} \iff \overline{\forall \Gamma} \vdash \varphi \iff \overline{\forall \Gamma} \vdash \overline{\forall \varphi}$.

240

Definiția 2.112

Fie Γ o mulțime de formule. Spunem că

- (i) Γ este **consistentă** dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.
- (ii) Γ este **inconsistentă** dacă nu este consistentă, adică $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ pentru orice formulă φ .

Propoziția 2.113

Pentru orice mulțime de formule Γ , următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este inconsistentă.
- (ii) Pentru orice formulă ψ , $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.
- (iii) Există o formulă ψ astfel încât $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

241

Teorema de completitudine - prima versiune

Fie Γ o mulțime de enunțuri.

$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Teorema de completitudine - a doua versiune

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ și orice enunț φ ,

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \iff \Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi.$$

- Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat.
- Henkin a dat în teza sa de doctorat din 1947 o demonstrație simplificată.

242

APLICAȚIE LA SISTEME MULTIAGENT

Referință

Michael Wooldridge, *An Introduction to MultiAgent Systems*, Second Edition, John Wiley & Sons, 2009

243

Întrebarea **Ce este un agent?** nu are un răspuns definitiv. De-a lungul timpului au fost propuse numeroase răspunsuri.

Definiția 2.114

Un agent este un sistem (informatic) care este situat într-un anumit mediu și care este capabil de acțiune autonomă în acel mediu pentru a-și îndeplini obiectivele care i-au fost atribuite.

Agentul determină singur ce trebuie făcut pentru a satisface obiectivele pentru care a fost proiectat, în loc să primească permanent instrucțiuni de la utilizatorul sau proprietarul său.

244

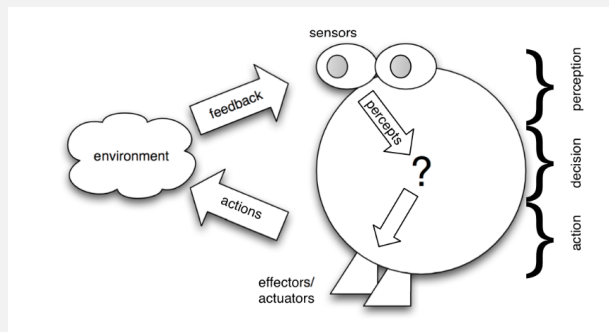


Figura 1: Un agent în mediul său

- ▶ Figura 1 oferă o vedere abstractă a unui agent în mediul său.
- ▶ Agentul primește **intrări senzoriale** din **mediu** și produce, ca ieșire, **acțiuni** care influențează acel mediu. Interacțiunea este de obicei una **continuă**.

245

- ▶ Notăm cu E mulțimea finită a **stărilor** mediului (*environment*):

$$E = \{e, e', e'', \dots\}$$

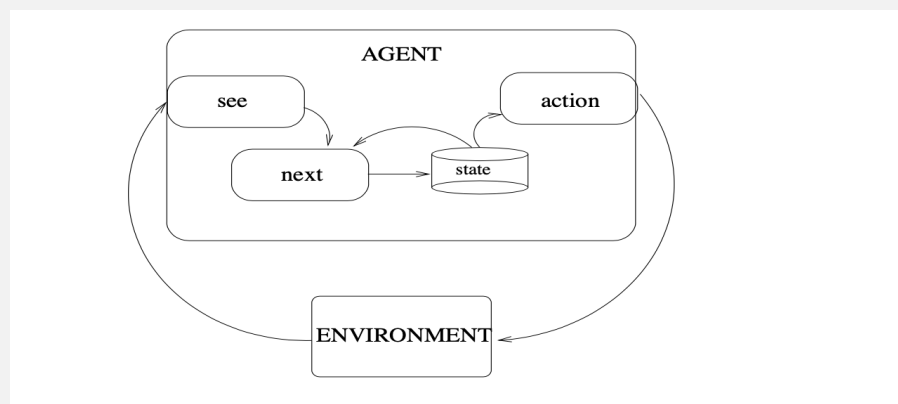
- ▶ Se presupune că un agent dispune de un repertoriu de posibile **acțiuni** disponibile:

$$Ac = \{\alpha, \alpha', \alpha'', \dots\}$$

- ▶ Acțiunile transformă starea mediului.
- ▶ Presupunem că mulțimea Ac conține o **acțiune specială null**, cu semnificația că nu va fi efectuată nicio acțiune.

246

Considerăm agenți bazați pe stări.



Acești agenți au o anumită **structură internă de date**, care este utilizată în mod tipic pentru a memora informații despre starea mediului și despre istoricul acestuia.

247

- ▶ I mulțimea stărilor interne ale agentului.
- ▶ **Per** este o mulțime nevidă de **percepte**.

Definiția 2.115

Funcția de **percepție see** este definită astfel:

$$see : E \rightarrow Per.$$

Funcția **see** descrie capacitatea agentului de a-și observa mediul. Rezultatul funcției **see** este un **percept** — o intrare perceptivă.
Exemplu: o cameră video sau un senzor în infraroșu al unui robot mobil.

Definiția 2.116

Funcția de **acțiune action** și funcția **next** sunt definite astfel:

$$action : I \rightarrow Ac, \quad next : I \times Per \rightarrow I.$$

248

Comportamentul unui agent bazat pe stări

- ▶ Agentul începe într-o stare internă inițială i_0 .
- ▶ Apoi observă starea mediului e și generează o percepție $see(e)$.
- ▶ Starea internă a agentului este apoi actualizată la $i_1 := next(i_0, see(e))$.
- ▶ Acțiunea selectată de agent este $\alpha := action(i_1)$.
- ▶ Agentul execută acțiunea α .
- ▶ Agentul intră într-un nou ciclu: percepe lumea prin intermediul lui see , își actualizează starea prin $next$ și alege o acțiune de executat prin $action$.

249

Abordarea **bazată pe logică** este abordarea clasică pentru construirea agenților.

- ▶ O **stare internă** a unui astfel de agent este o **bază de date** formată din formule ale **logicii de ordinul întâi**.
- ▶ Baza de date a agentului ar putea conține formule precum $Open(valve1)$, $Temperature(reactor6, 32)$, $Pressure(tank6, 28)$.
- ▶ Baza de date reprezintă **informațiile** pe care agentul le are despre mediul său.
- ▶ Baza de date a unui agent joacă un rol oarecum analog cu cel al **credinței** la oameni. Unele informații din baza de date pot fi incorecte — senzorii agentului pot fi defecti, raționamentul poate fi greșit, iar informațiile pot fi învechite.
- ▶ Astfel, faptul că $Open(valve1)$ se află în bază nu înseamnă că $valve1$ este deschisă; ea poate fi închisă.

250

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și $Form_{\mathcal{L}}$ mulțimea formulelor sale.

Presupunem că $\mathcal{L}$ conține:

- ▶ un simbol de relație unară Do ;
- ▶ un simbol de constantă c_{α} pentru fiecare acțiune $\alpha \in Ac$. Pentru simplitate, scriem α în loc de c_{α} .

- ▶ O **bază de date** este o mulțime de formule a lui $\mathcal{L}$.
- ▶ Fie $\mathcal{D}$ mulțimea tuturor bazelor de date. Deci, $\mathcal{D} = 2^{Form_{\mathcal{L}}}$.
- ▶ Notăm cu $DB, DB_1, \dots$ elementele lui $\mathcal{D}$.
- ▶ O stare internă a unui agent este o bază de date. Deci, $I = \mathcal{D}$.

251

- ▶ Fixăm o mulțime $\Sigma \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ de formule ale lui $\mathcal{L}$, ale cărei elemente se numesc **formule de deducție**.
- ▶ Folosim notația $DB \vdash_{\Sigma} \varphi$ pentru $DB \cup \Sigma \vdash \varphi$.
- ▶ Ideea este că
dacă $DB \vdash_{\Sigma} Do(\alpha)$, atunci α este acțiunea care urmează să fie executată de agent.
- ▶ Comportamentul agentului este determinat de **formulele sale de deducție** (**programul său**) și de **baza de date curentă**.

Definiția în pseudocod a funcției $action : \mathcal{D} \rightarrow Ac$ este prezentată în Figura 2.

252

```

1.  function action( $DB : \mathcal{D}$ ) returns an action  $Ac$ 
2.  begin
3.    for each  $\alpha \in Ac$  do
4.      if  $DB \vdash_{\Sigma} Do(\alpha)$  then
5.        return  $\alpha$ 
6.      end-if
7.    end-for
8.    for each  $\alpha \in Ac$  do
9.      if  $DB \not\vdash_{\Sigma} \neg Do(\alpha)$  then
10.        return  $\alpha$ 
11.      end-if
12.    end-for
13.    return null
14.  end function action

```

Figura 2: Funcția de selecție a acțiunilor agentului.

253

- ▶ În liniile 3–7, agentul ia pe rând fiecare dintre acțiunile sale posibile α și încearcă să demonstreze formula $Do(\alpha)$ pornind de la baza sa de date DB (transmisă ca parametru funcției), folosind mulțimea sa Σ de formule de deducție. Dacă agentul reușește să demonstreze $Do(\alpha)$, atunci α este returnată ca acțiunea care urmează să fie executată.
- ▶ Dacă agentul nu reușește să demonstreze $Do(\alpha)$ pentru nicio acțiune $\alpha \in Ac$, atunci încearcă să găsească o acțiune care este compatibilă cu formulele de deducție și cu baza de date, adică una care nu este explicit interzisă.
- ▶ În liniile 8–12, agentul încearcă să găsească o acțiune $\alpha \in Ac$ astfel încât $\neg Do(\alpha)$ să nu poată fi derivată din baza sa de date folosind formulele de deducție. Dacă reușește să găsească o astfel de acțiune, atunci aceasta este returnată ca acțiunea care urmează să fie executată.

254

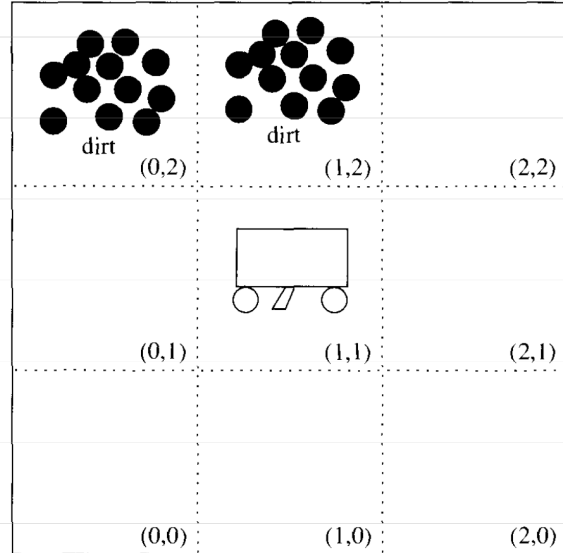
- ▶ Dacă însă agentul nu reușește să găsească nicio acțiune care să fie măcar consistentă, atunci returnează acțiunea specială *null*, indicând că nu a fost selectată nicio acțiune.

255

- ▶ Avem un mic **agent robotic** care curăță o casă.
- ▶ Robotul este echipat cu un **senzor** care îi indică dacă se află deasupra vreunei **murdării** și cu un **aspirator** care poate fi folosit pentru a aspira **murdăria**.
- ▶ Robotul are întotdeauna o orientare bine determinată: **nord**, **sud**, **est** sau **vest**.
- ▶ Pe lângă faptul că poate aspira murdăria, agentul se poate deplasa **înainte cu un "pas"** sau se poate **roti cu 90 de grade spre dreapta**.
- ▶ Agentul se deplasează într-o cameră împărțită sub formă de grilă în mai multe pătrate de dimensiuni egale.
- ▶ Agentul nostru nu părăsește niciodată camera.
- ▶ Pentru simplitate, presupunem că încăperea este o grilă 3×3 , iar agentul începe întotdeauna în **pătratul (0,0)**, **orientat spre nord**.

256

Exemplu: lumea aspiratorului (vacuum cleaning world)



257

Exemplu: lumea aspiratorului (vacuum cleaning world)

- ▶ Mulțimea *Per* a **percepțiilor** este definită astfel:
 $Per = \{murdar, nimic\}$,
 unde **murdar** semnifică faptul că există murdărie sub el, iar **nimic** indică faptul că nu există nicio informație specială.
- ▶ Mulțimea *Ac* a acțiunilor este definită astfel:
 $Ac = \{\text{înainte, aspiră, rotește}\}$,
 unde **înainte** înseamnă **mergi înainte**, **aspiră** înseamnă **aspiră murdăria**, iar **rotește** înseamnă **rotește-te cu 90 de grade spre dreapta**.
- ▶ Scopul agentului este de a parcurge continuu camera, căutând și îndepărtând murdăria.

258

Exemplu: lumea aspiratorului (vacuum cleaning world)

Folosim trei **predicate simple ale domeniului**:

- $La(i, j)$ agentul se află la (i, j) ,
 - $Murdar(i, j)$ există murdărie la (i, j) ,
 - $Orientare(d)$ agentul este orientat în direcția d ,
- unde $i, j \in \{0, 1, 2\}$ și $d \in \{\text{nord, sud, est, vest}\}$.

Prin urmare, limbajul de ordinul întâi $\mathcal{L}$ conține:

- ▶ două simboluri de relație binară ***La*** și ***Murdar***;
- ▶ un simbol de relație unară ***Orientare***;
- ▶ simbolurile de constantă ***nord, sud, est, vest***;
- ▶ simbolurile de constantă **0, 1, 2**.

259

Exemplu: lumea aspiratorului (vacuum cleaning world)

Funcția **next**

- ▶ analizează informațiile perceptuale obținute din mediu și baza de date curentă și generează o nouă bază de date care include aceste informații.
- ▶ elimină informațiile vechi sau irelevante și, de asemenea, încearcă să determine **noua** poziție și orientare a agentului.

Specificăm funcția **next** în mai multe părți.

Fie $old(DB)$ mulțimea informațiilor **vechi** dintr-o bază de date, pe care dorim ca funcția de actualizare **next** să le elimine.

$$old(DB) = DB \cap \Delta,$$

unde

$$\Delta = \{La(i, j) \mid i, j \in \{0, 1, 2\}\} \cup \{Murdar(i, j) \mid i, j \in \{0, 1, 2\}\} \cup \{Orientare(d) \mid d \in \{\text{nord, sud, est, vest}\}\}.$$

260



Exemplu: lumea aspiratorului (vacuum cleaning world)

- ▶ Avem nevoie de o funcție **new**, care oferă mulțimea noilor formule ce trebuie adăugate în baza de date:

$$new : \mathcal{D} \times Per \rightarrow \mathcal{D}.$$

- ▶ Aceasta trebuie să genereze formule de tipul:
 - ▶ $La(\dots)$, care descrie noua poziție a agentului;
 - ▶ $Orientare(\dots)$, care descrie orientarea agentului;
 - ▶ $Murdar(\dots)$, dacă a fost detectată murdărie în noua poziție.

Funcția **next** este definită astfel:

$$next : \mathcal{D} \times Per \rightarrow \mathcal{D}, \quad next(DB, p) = (DB - old(DB)) \cup new(DB, p)$$

261



Exemplu: lumea aspiratorului (vacuum cleaning world)

Formulele de deducție au forma generală

$$\varphi \rightarrow \psi, \quad \text{unde } \varphi, \psi \text{ sunt formule ale lui } \mathcal{L}$$

Curățare

$$La(x, y) \wedge Murdar(x, y) \rightarrow Do(\text{aspiră}) \quad x, y \text{ sunt variabile}$$

- ▶ Dacă agentul se află în poziția (x, y) și percepe murdărie, atunci acțiunea prescrisă va fi aspirarea murdăriei.
- ▶ Această acțiune are prioritate față de toate celelalte comportamente posibile ale agentului (cum ar fi navigarea).

262



Exemplu: lumea aspiratorului (vacuum cleaning world)

Traversarea

- ▶ Acțiunea de bază a agentului este parcurgerea mediului.
- ▶ Pentru simplitate, presupunem că robotul se va deplasa întotdeauna de la $(0, 0)$ la $(0, 1)$, apoi la $(0, 2)$ și după aceea la $(1, 2)$, $(1, 1)$ și așa mai departe. Odată ce agentul ajunge la $(2, 2)$, acesta trebuie să se întoarcă la $(0, 0)$.
- ▶ **Formulele de deducție** care tratează parcurgerea până la $(0, 2)$ sunt:

$$La(0, 0) \wedge Orientare(nord) \wedge \neg Murdar(0, 0) \rightarrow Do(\text{înainte})$$

$$La(0, 1) \wedge Orientare(nord) \wedge \neg Murdar(0, 1) \rightarrow Do(\text{înainte})$$

$$La(0, 2) \wedge Orientare(nord) \wedge \neg Murdar(0, 2) \rightarrow Do(\text{rotește})$$

$$La(0, 2) \wedge Orientare(est) \rightarrow Do(\text{înainte})$$

- ▶ Formule similare pot fi generate cu ușurință pentru a conduce agentul până la $(2, 2)$ și înapoi la $(0, 0)$.

263