

Seminar 3

(S3.1) Să se deriveze prin rezoluție clauza $C := \{\neg v_0, v_2\}$ din forma clauzală a unei formule în FNC echivalente semantic cu:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_1) \rightarrow v_2) \wedge (v_0 \rightarrow v_1)$$

Demonstrație: Înlocuind implicațiile și aplicând legile de Morgan, obținem că:

$$\begin{aligned}\varphi &\sim (\neg(v_0 \wedge v_1) \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1) \\ &\sim (\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1),\end{aligned}$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ' , a cărei formă clauzală este

$$\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1 := \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}.$$

Din faptul că $v_1 \in C_2$ și $\neg v_1 \in C_1$, avem că

$$C := (C_1 \setminus \{\neg v_1\}) \cup (C_2 \setminus \{v_1\}) = \{\neg v_0, v_2\}$$

este un rezolvent al clauzelor C_1 și C_2 . Cum C_1 și C_2 sunt în $\mathcal{S}_{\varphi'}$, avem așadar că (C_1, C_2, C) este o derivare prin rezoluție a lui C din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, forma clauzală a lui φ' , formulă în FNC echivalentă semantic cu φ . $\square$

(S3.2) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstrație: Notând mulțimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obținem următoarea rulare:

$i := 1$
 $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$
P1.1. $x_1 := v_0$
 $T_1^1 := \{\{v_0\}\}$
 $T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\}$
P1.2. $U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$
P1.3. $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$
P1.4. $i := 2$; goto *P2.1*
P2.1. $x_2 := v_1$
 $T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\}$
 $T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\}$
P2.2. $U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$
P2.3. $\mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$
P2.4. $i := 3$; goto *P3.1*
P3.1. $x_3 := v_2$
 $T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$
 $T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\}$
P3.2. $U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
P3.3. $\mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
P3.4. $i := 4$; goto *P4.1*
P4.1. $x_4 := v_3$
 $T_4^1 := \{\{v_3\}\}$
 $T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
P4.2. $U_4 := \{\{v_4, v_6\}\}$
P4.3. $\mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$
P4.4. $i := 5$; goto *P5.1*

$P5.1.$	$x_5 := v_4$ $T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$ $T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$
$P5.2.$	$U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$
$P5.3.$	$\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$
$P5.4.$	$i := 6$; goto $P6.1$
$P6.1.$	$x_6 := v_5$ $T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$ $T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
$P6.4.$	$i := 7$; goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_6$ $T_7^1 := \{\{v_6\}\}$ $T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

□

(S3.3) (Metoda reducerii la absurd)

Să se arate că pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstrație: Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	Ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	Teorema deducției
(3)	$\Gamma \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$	(A3) și Propoziția 1.53.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$	Propozițiile 1.60 și 1.54.(ii)
(6)	$\Gamma \vdash \psi$	(MP): (4), (5).

□

(S3.4) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ și orice $\Gamma \subseteq Form$,

- (i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;
- (ii) $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
- (iii) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iv) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$;
- (v) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.

Demonstrație: Demonstrăm (i):

- (1) $\vdash \neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (A1)
- (2) $\{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$ Teorema deducției
- (3) $\{\neg\psi\} \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ (A3) și Propoziția 1.53.(i)
- (4) $\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$ (MP): (2), (3)
- (5) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$ Teorema deducției.

Punctul (ii) se obține din (i) aplicând de două ori Teorema deducției:

- (1) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$ se aplică (i)
- (2) $\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$ Teorema deducției
- (3) $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ Teorema deducției.

Punctul (iii) se obține în felul următor:

- (1) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \perp)$ se aplică (ii) și Prop. 1.54.(ii)
- (2) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ Ipoteză
- (3) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi \rightarrow \perp$ (MP): (1), (2)
- (4) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ Ipoteză
- (5) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$ (MP): (3), (4)
- (6) $\Gamma \vdash \varphi$ (S3.3) pentru (5).

Demonstrăm în continuare (iv).

- (1) $\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$ se aplică (i)
- (2) $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ (S3.3) pentru (1)
- (3) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$. Teorema deducției.

Demonstrăm (v):

- (1) $\vdash \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$ se aplică (iv) cu $\varphi \mapsto \neg\varphi$
- (2) $\vdash (\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ (A3)
- (3) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ (MP): (1), (2).

□

(S3.5) Să se arate că pentru orice formulă φ ,

$$\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi.$$

Demonstrație: Avem

- | | | | |
|-----|--|--|--------------------------------|
| (1) | $\{\neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi\}$ | $\vdash \neg\varphi$ | Propoziția 1.53.(ii) |
| (2) | $\{\neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi\}$ | $\vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$ | Propoziția 1.53.(ii) |
| (3) | $\{\neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi\}$ | $\vdash \varphi$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\{\neg\varphi \rightarrow \varphi\}$ | $\vdash \varphi$ | (S3.4).(iii) pentru (1) și (3) |
| (5) | | $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ | Teorema deducției. |

□

(S3.6) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi).$$

Demonstrație: Avem

- | | | | |
|-----|---|--|---------------------------------|
| (1) | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \psi$ | Propoziția 1.53.(ii) |
| (2) | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \neg\varphi$ | Propoziția 1.53.(ii) |
| (3) | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)$ | Propoziția 1.53.(ii) |
| (4) | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ | (S3.4).(iv) și Prop. 1.54.(ii) |
| (5) | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \psi \rightarrow \varphi$ | (MP): (3), (4) |
| (6) | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \varphi$ | (MP): (1), (5) |
| (7) | $\{\psi, \neg\varphi\}$ | $\vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi)$ | (S3.4).(iii) pentru (2) și (6). |

□

(S3.7) (“Reciproca” axiomei 3)

Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi).$$

Demonstrație:

(1)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \rightarrow \psi$	Propoziția 1.53.(ii)
(2)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziția 1.53.(ii)
(3)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Propoziția 1.53.(ii)
(4)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(S3.4).(iv) și Propoziția 1.54.(ii)
(5)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(S3.4).(iii) pentru (2) și (6)
(8)	$\{\varphi \rightarrow \psi\}$	$\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	Teorema deducției
(9)		$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	Teorema deducției.

□