

Seminar 4

Pentru primele două exerciții, fixăm $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I care conține:

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- două simboluri de constante c, d .

(S4.1) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

- (i) $\forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d)$;
- (ii) $\forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z))$;
- (iii) $\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z))$;
- (iv) $\exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))$.

Demonstrație:

(i)

$$\begin{aligned} \forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d) &\models \forall x(f(x) = c) \wedge \exists z \neg(g(y, z) = d) \\ &\models \forall x \exists z (f(x) = c \wedge \neg(g(y, z) = d)). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z)) &\models \forall y \exists z (\forall x P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \\ &\models \forall y \exists z (\forall u P(u, y) \rightarrow Q(x, z)) \\ &\models \forall y \exists z \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(x, z)). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y (S(y) \rightarrow \forall z R(z)) &\models \exists x (\forall y P(x, y) \vee \neg \exists y \forall z (S(y) \rightarrow R(z))) \\
&\models \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall y \exists z \neg (S(y) \rightarrow R(z))) \\
&\models \exists x (\forall u P(x, u) \vee \forall y \exists z \neg (S(y) \rightarrow R(z))) \\
&\models \exists x \forall u \forall y \exists z (P(x, u) \vee \neg (S(y) \rightarrow R(z))).
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\exists z (\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg (\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x)) &\models \\
\exists z \exists x (Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (\neg \neg \exists x R(x) \vee \neg \forall x \exists z Q(z, x)) &\models \\
\exists z \exists x (Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (\exists x R(x) \vee \exists x \forall z \neg Q(z, x)) &\models \\
\exists z \exists x (Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow \exists x (R(x) \vee \forall z \neg Q(z, x)) &\models \\
\exists z \exists x (Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow \exists x \forall z (R(x) \vee \neg Q(z, x)) &\models \\
\exists z \exists x (Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow \exists u \forall v (R(u) \vee \neg Q(v, u)) &\models \\
\forall z \forall x \exists u \forall v ((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u))). &
\end{aligned}$$

□

(S4.2) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunțul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

- (i) $\forall x \exists z (f(x) = c \wedge \neg (g(x, z) = d))$;
- (ii) $\forall y \exists z \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(y, z))$;
- (iii) $\exists x \forall u \forall y \exists z (P(x, u) \vee \neg (S(y) \rightarrow R(z)))$;
- (iv) $\forall z \forall x \exists u \forall v ((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))$.

Demonstrație:

- (i) Avem $\varphi^1 = \forall x (f(x) = c \wedge \neg (g(x, z) = d))_z(h(x)) = \forall x (f(x) = c \wedge \neg (g(x, h(x)) = d))$, unde h este un nou simbol de operație unară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.
- (ii) Avem $\varphi^1 = \forall y \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(y, z))_z(p(y)) = \forall y \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(y, p(y)))$, unde p este un nou simbol de operație unară, și $\varphi^2 = \forall y (P(u, y) \rightarrow Q(y, p(y)))_u(j(y)) = \forall y (P(j(y), y) \rightarrow Q(y, p(y)))$, unde j este un nou simbol de operație unară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iii) Avem $\varphi^1 = \forall u \forall y \exists z (P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))_x(m) = \forall u \forall y \exists z (P(m, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$, unde m este un nou simbol de constantă, și $\varphi^2 = \forall u \forall y (P(m, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))_z(k(u, y)) = \forall u \forall y (P(m, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(k(u, y))))$, unde k este un nou simbol de operație binară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iv) Avem

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \forall z \forall x \forall v ((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))_u(n(z, x)) \\ &= \forall z \forall x \forall v ((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(n(z, x)) \vee \neg Q(v, n(z, x))))\end{aligned}$$

unde n este un nou simbol de operație binară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

□

(S4.3) Demonstrați că orice clasă finit axiomatizabilă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$ -structuri este axiomatizată de un singur enunț.

Demonstrație: Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de enunțuri a.î. $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma)$. Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A} \models \varphi_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\} \iff \mathcal{A} \models \varphi$. Așadar, $\text{Mod}(\varphi) = \text{Mod}(\Gamma) = \mathcal{K}$. □

(S4.4) Demonstrați că dacă o clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$ -structuri este finit axiomatizabilă, atunci complementul său $\mathcal{K}^c$ este de asemenea finit axiomatizabilă.

Demonstrație: Conform (S6.3), $\mathcal{K}$ este axiomatizată de un singur enunț φ , deci $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi)$. Rezultă imediat că pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}^c \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Prin urmare, $\mathcal{K}^c = \text{Mod}(\neg\varphi)$. □

(S4.5) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conține un singur simbol, anume un simbol de relație de aritate 2. Să se găsească un enunț φ astfel încât $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <) \models \varphi$, dar $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$, unde ordinea peste $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ este pe componente: $(a, b) < (c, d)$ ddacă $a < c$ și $b < d$.

Demonstrație: Luăm

$$\varphi := \exists v_0 \exists v_1 (\neg(v_0 < v_1) \wedge \neg(v_1 < v_0) \wedge \neg(v_0 = v_1)).$$

Atunci $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <) \models \varphi$ dacă și numai dacă există $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ incomparabile, ceea ce este adevărat: luăm $(0, 1)$ și $(1, 0)$ în ordinea produs. Deci, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <) \models \varphi$.

Pe de altă parte, $(\mathbb{Z}, <) \models \varphi$ ddacă există $m, n \in \mathbb{Z}$ cu $\neg(m < n) \wedge \neg(n < m) \wedge \neg(m = n)$, ceea ce este fals, deoarece $<$ este o ordine totală pe $\mathbb{Z}$. Deci, $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$. □

(S4.6) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$. Demonstrați următoarele:

- (i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.
- (ii) $Th(\Gamma)$ este o $\mathcal{L}$ -teorie.
- (iii) Fie T o $\mathcal{L}$ -teorie a.î. $\Gamma \subseteq T$. Atunci $Th(\Gamma) \subseteq T$.

Demonstrație:

- (i) " $\supseteq$ " Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, avem că $\Gamma \models \varphi$, deci $\varphi \in Th(\Gamma)$. Așadar, $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$. Aplicăm Lema 4.72.(ii).
" $\subseteq$ " Fie $\mathcal{A} \in Mod(\Gamma)$ și $\varphi \in Th(\Gamma)$ arbitrar. Avem că $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $\Gamma \models \varphi$, deci $\mathcal{A} \models \varphi$. Așadar, $\mathcal{A} \in Mod(Th(\Gamma))$.

- (ii) Demonstrăm că $Th(\Gamma)$ este o $\mathcal{L}$ -teorie. Pentru orice enunț φ , avem că

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) \models \varphi &\iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi) \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi) \text{ (conform (i))} \\ &\iff \Gamma \models \varphi \iff \varphi \in Th(\Gamma). \end{aligned}$$

- (iii) Fie T o $\mathcal{L}$ -teorie care conține Γ și $\varphi \in Th(\Gamma)$. Din $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ și $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$ rezultă că $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$, deci $T \models \varphi$. Deoarece T este $\mathcal{L}$ -teorie, obținem că $\varphi \in T$. Așadar, $Th(\Gamma) \subseteq T$.

□