

## Seminar 4

Pentru primele două exerciții, fixăm  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul I care conține:

- două simboluri de relații unare  $R, S$  și două simboluri de relații binare  $P, Q$ ;
- un simbol de funcție unară  $f$  și un simbol de funcție binară  $g$ ;
- două simboluri de constante  $c, d$ .

(S4.1) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui  $\mathcal{L}$ :

- (i)  $\forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d)$ ;
- (ii)  $\forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z))$ ;
- (iii)  $\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z))$ ;
- (iv)  $\exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))$ .

(S4.2) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunțul  $\varphi$  în formă normală prenex, unde  $\varphi$  este, pe rând:

- (i)  $\forall x \exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d))$ ;
- (ii)  $\forall y \exists z \exists u(P(u, y) \rightarrow Q(y, z))$ ;
- (iii)  $\exists x \forall u \forall y \exists z(P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$ ;
- (iv)  $\forall z \forall x \exists u \forall v((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))$ .

(S4.3) Demonstrați că orice clasă finit axiomatizabilă  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{L}$ -structuri este axiomatizată de un singur enunț.

(S4.4) Demonstrați că dacă o clasă  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{L}$ -structuri este finit axiomatizabilă, atunci complementul său  $\mathcal{K}^c$  este de asemenea finit axiomatizabilă.

(S4.5) Considerăm limbajul  $\mathcal{L}$  ce conține un singur simbol, anume un simbol de relație de aritate 2. Să se găsească un enunț  $\varphi$  astfel încât  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <) \models \varphi$ , dar  $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$ , unde ordinea peste  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  este pe componente:  $(a, b) < (c, d)$  ddacă  $a < c$  și  $b < d$ .

(S4.6) Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi și  $\Gamma$  o mulțime de enunțuri ale lui  $\mathcal{L}$ . Demonstrați următoarele:

- (i)  $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$ .
- (ii)  $Th(\Gamma)$  este o  $\mathcal{L}$ -teorie.
- (iii) Fie  $T$  o  $\mathcal{L}$ -teorie a.î.  $\Gamma \subseteq T$ . Atunci  $Th(\Gamma) \subseteq T$ .