

## Seminar 8

Se notează cu  $\mathcal{L}_{Graf}$  limbajul care conține un singur simbol, anume un simbol de relație de aritate 2, notat aici cu  $\dot{E}$ . Fie  $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$ , unde

$$\begin{aligned}(IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x, x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)).\end{aligned}$$

Atunci clasa tuturor grafurilor (neorientate) este axiomatizată de  $\Gamma$ , adică este egală cu  $Mod(\Gamma)$ .

**(S8.1)** Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

- (i) grafurile complete;
- (ii) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;
- (iii) grafurile care au cel puțin un ciclu de lungime 3.

**Demonstrație:**

- (i) Fie  $\mathcal{K}_1$  clasa grafurilor complete. Considerăm enunțul

$$\varphi_1 := \forall v_1 \forall v_2 (\neg(v_1 = v_2) \rightarrow \dot{E}(v_1, v_2)).$$

Atunci  $\mathcal{K}_1 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_1\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_1)$ .

- (ii) Fie  $\mathcal{K}_2$  clasa grafurilor care au proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă. Considerăm enunțul

$$\varphi_2 := \forall v_1 \exists v_2 \dot{E}(v_1, v_2) \wedge \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 (\dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_1, v_3) \rightarrow v_2 = v_3).$$

Atunci  $\mathcal{K}_2 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_2\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_2)$ .

- (iii) Fie  $\mathcal{K}_3$  clasa grafurilor care au cel puțin un ciclu de lungime 3. Considerăm enunțul

$$\varphi_3 := \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 (\dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_1)).$$

Atunci  $\mathcal{K}_3 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_3\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_3)$ .

□

**Teorema 1** (Teorema de compacitate pentru logica de ordinul I). *Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul I și  $\Gamma$  o mulțime de  $\mathcal{L}$ -enunțuri. Dacă orice submulțime finită a lui  $\Gamma$  este satisfiabilă, atunci  $\Gamma$  este satisfiabilă.*

(S8.2) Să se arate că clasa grafurilor conexe nu este axiomatizabilă.

**Demonstrație:** Presupunem că ar fi axiomatizată de o mulțime de enunțuri  $\Sigma$ .

Fie  $\mathcal{L}'$  limbajul ce extinde  $\mathcal{L}_{Graf}$  prin adăugarea a două noi constante notate cu  $c, d$ . Considerăm  $\mathcal{L}'$ -enunțurile:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &:= \neg(c = d), \\ \varphi_1 &:= \neg(c \dot{E} d), \\ \varphi_2 &:= \neg \exists v_1 (c \dot{E} v_1 \wedge v_1 \dot{E} d),\end{aligned}$$

iar pentru orice  $n \geq 3$ ,

$$\varphi_n := \neg \exists v_1 \dots \exists v_{n-1} \left( c \dot{E} v_1 \wedge v_{n-1} \dot{E} d \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-2} v_i \dot{E} v_{i+1} \right).$$

Se observă că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_n$  exprimă faptul că nu există un drum de lungime  $n$  între nodurile care interpretează constantele  $c$  și  $d$ .

Fie  $\Gamma := \Sigma \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Arătăm că orice submulțime finită a lui  $\Gamma$  este satisfiabilă. Fie  $\Delta \subseteq \Gamma$  finită. Atunci există  $N \in \mathbb{N}$  cu  $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\varphi_n \mid n \leq N\}$ . Fie graful a cărui mulțime suport este  $V = \{0, \dots, N+1\}$ , iar pentru orice  $i, j \in V$ , punem  $i E j$  dacă și numai dacă  $|i - j| = 1$ . Acest graf este conex. Interpretând în acest graf constanta  $c$  prin 0, iar  $d$  prin  $N+1$ , obținem o  $\mathcal{L}'$ -structură care satisface  $\Sigma \cup \{\varphi_n \mid n \leq N\}$ , deci și  $\Delta$ .

Din teorema de compacitate, rezultă că  $\Gamma$  este satisfiabilă, i.e. admite un model. Dar aceasta duce la o contradicție, deoarece, pe de-o parte, avem că modelul trebuie să fie conex (fiindcă  $\Sigma \subseteq \Gamma$ ), iar, pe de altă parte, nodurile care interpretează constantele  $c$  și  $d$  nu pot fi legate printr-un drum de nicio lungime (fiindcă  $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Gamma$ ). □

(S8.3) Fie  $\mathcal{K}$  o clasă de  $\mathcal{L}$ -structuri și  $\mathcal{K}^c$  complementul său în clasa tuturor  $\mathcal{L}$ -structurilor. Dacă atât  $\mathcal{K}$  cât și  $\mathcal{K}^c$  sunt axiomatizabile, atunci amândouă sunt finit axiomatizabile.

**Demonstrație:** Fie  $\Gamma, \Delta \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$  a.î.  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma)$  și  $\mathcal{K}^c = \text{Mod}(\Delta)$ . Presupunem prin reducere la absurd că  $\mathcal{K}$  nu este finit axiomatizabilă. Demonstrăm folosind Teorema de compacitate că  $\Gamma \cup \Delta$  este satisfiabilă. Fie  $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \Delta$  finită. Atunci  $\Sigma \subseteq \Gamma_0 \cup \Delta$ , unde  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  este finită. Deoarece  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\Gamma_0)$  și  $\mathcal{K} \neq \text{Mod}(\Gamma_0)$ , există  $\mathcal{A}$  a.î.  $\mathcal{A} \models \Gamma_0$  și  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}^c$ . Prin urmare, cum  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}^c$ ,  $\mathcal{A} \models \Delta$ , deci  $\mathcal{A} \models \Gamma_0 \cup \Delta$  și în particular  $\mathcal{A} \models \Sigma$ .

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că  $\Gamma \cup \Delta$  are un model  $\mathcal{B}$ . Ar rezulta atunci că  $\mathcal{B} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c = \emptyset$ , contradicție.

Demonstrăm analog că  $\mathcal{K}^c$  este finit axiomatizabilă.  $\square$

**(S8.4)** Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi și  $\Gamma$  o mulțime de enunțuri ale lui  $\mathcal{L}$  cu proprietatea că

(\*) pentru orice  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma$  are un model finit de cardinal  $\geq m$ .

Notăm cu  $\mathcal{M}$  clasa modelelor finite ale lui  $\Gamma$ . Demonstrați că  $\mathcal{M}$  nu este axiomatizabilă.

**Demonstrație:** Presupunem prin reducere la absurd că  $\mathcal{M}$  este axiomatizabilă. Așadar, există  $\Delta \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$  a.î.

(\*\*) pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \models \Delta \iff \mathcal{A} \in \mathcal{M}$ .

Fie

$$\Sigma := \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că  $\Sigma$  este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate.

Fie  $\Sigma_0$  o submulțime finită a lui  $\Sigma$ . Atunci

$$\Sigma_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie  $m := \max\{n_1, \dots, n_k\}$ . Conform (\*),  $\Gamma$  are un model finit  $\mathcal{A}$  a.î.  $|A| \geq m$ . Deoarece  $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ , avem conform (\*\*), că  $\mathcal{A} \models \Delta$ . De asemenea,  $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$  pentru orice  $i = 1, \dots, k$ . Prin urmare,  $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\}$ , de unde rezultă că  $\mathcal{A} \models \Sigma_0$ . Așadar,  $\Sigma_0$  este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că  $\Sigma$  are un model  $\mathcal{B}$ .

Deoarece  $\mathcal{B} \models \Delta$ , avem, conform (\*\*), că  $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ . În particular,  $\mathcal{B}$  este finită.

Deoarece  $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$ , rezultă că  $\mathcal{B}$  este infinită.

Am obținut o contradicție.  $\square$