

Model de examen

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1 punct] Fie LP logica propozițională, $\mathcal{E}$ o mulțime de evaluări și

$$\Gamma = \{\psi \in Form \mid e \models \psi \text{ pentru orice } e \in \mathcal{E}\}.$$

Presupunem că $\mathcal{E}$ are cel puțin două elemente. Demonstrați că există o formulă φ cu proprietatea că $\varphi \notin \Gamma$ și $\neg\varphi \notin \Gamma$.

Demonstrație: Fie e, f două evaluări distincte din $\mathcal{E}$. Atunci există $v \in V$ a.î. $e(v) \neq f(v)$. Avem două cazuri:

- (i) $e(v) = 0$ și $f(v) = 1$, deci $f(\neg v) = 0$. Deoarece $e \not\models v$, avem că $v \notin \Gamma$. Deoarece $f \not\models \neg v$, avem că $\neg v \notin \Gamma$.
- (ii) $e(v) = 1$ și $f(v) = 0$. Similar.

□

(P2) [1 punct] Fie LP logica propozițională și $\varphi, \psi \in Form$. Demonstrați sintactic că:

$$\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi.$$

Demonstrație: Avem:

- | | | |
|-----|--|--|
| (1) | $\{\psi, \varphi\} \vdash \psi \wedge \varphi$ | Propoziția 1.68, (48) |
| (2) | $\{\varphi, \psi\} \vdash \psi \wedge \varphi$ | deoarece $\{\psi, \varphi\} = \{\varphi, \psi\}$ |
| (3) | $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \wedge \varphi$ | Propoziția 1.68, (49) și (2) |
| (4) | $\vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi$ | Teorema deducției: (3) |
| (5) | $\vdash \psi \wedge \varphi \rightarrow \varphi \wedge \psi$ | se demonstrează similar |
| (6) | $\{\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi, \psi \wedge \varphi \rightarrow \varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$ | Propoziția 1.68, (48) |
| (7) | $\vdash (\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi) \rightarrow ((\psi \wedge \varphi \rightarrow \varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi))$ | Teorema deducției: (6) |
| (8) | $\vdash (\psi \wedge \varphi \rightarrow \varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi)$ | (MP): (4), (7) |
| (9) | $\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$ | (MP): (5), (8). |

□

(P3) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$. Demonstrați următoarele:

- (i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.
- (ii) $Th(\Gamma)$ este o $\mathcal{L}$ -teorie.
- (iii) Fie T o $\mathcal{L}$ -teorie a.î. $\Gamma \subseteq T$. Atunci $Th(\Gamma) \subseteq T$.

Demonstrație:

- (i) " $\supseteq$ " Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, avem că $\Gamma \models \varphi$, deci $\varphi \in Th(\Gamma)$. Așadar, $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$. Aplicăm Lema 2.34.(ii).
" $\subseteq$ " Fie $\mathcal{A} \in Mod(\Gamma)$ și $\varphi \in Th(\Gamma)$ arbitrar. Avem că $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $\Gamma \models \varphi$, deci $\mathcal{A} \models \varphi$. Așadar, $\mathcal{A} \in Mod(Th(\Gamma))$.

- (ii) Demonstrăm că $Th(\Gamma)$ este o $\mathcal{L}$ -teorie. Pentru orice enunț φ , avem că

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) \models \varphi &\iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi) \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi) \text{ (conform (i))} \\ &\iff \Gamma \models \varphi \iff \varphi \in Th(\Gamma). \end{aligned}$$

- (iii) Fie T o $\mathcal{L}$ -teorie care conține Γ și $\varphi \in Th(\Gamma)$. Din $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ și $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$ rezultă că $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$, deci $T \models \varphi$. Deoarece T este $\mathcal{L}$ -teorie, obținem că $\varphi \in T$. Așadar, $Th(\Gamma) \subseteq T$.

□

(P4) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea că

$$(*) \quad \text{pentru orice } m \in \mathbb{N}, \Gamma \text{ are un model finit de cardinal } \geq m.$$

Notăm cu $\mathcal{M}$ clasa modelelor finite ale lui Γ . Demonstrați că $\mathcal{M}$ nu este axiomatizabilă.

Demonstrație: Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{M}$ este axiomatizabilă. Așadar, există $\Delta \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$ a.î.

$$(**) \quad \text{pentru orice } \mathcal{L}\text{-structură } \mathcal{A}, \mathcal{A} \models \Delta \iff \mathcal{A} \in \mathcal{M}.$$

Fie

$$\Sigma := \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Σ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate.

Fie Σ_0 o submulțime finită a lui Σ . Atunci

$$\Sigma_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit $\mathcal{A}$ a.î. $|A| \geq m$. Deoarece $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$, avem conform (**), că $\mathcal{A} \models \Delta$. De asemenea, $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$. Prin urmare, $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \Delta \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \models \Sigma_0$. Așadar, Σ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Σ are un model $\mathcal{B}$.

Deoarece $\mathcal{B} \models \Delta$, avem, conform (**), că $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$. În particular, $\mathcal{B}$ este finită.

Deoarece $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.

Am obținut o contradicție. □

Partea II. Probleme de laborator cu rezolvare clasică

(P5) [1 punct] Definiți un predicat `expand_intervals/2` care, pentru o listă de perechi de numere naturale, calculează lista `R` formată în felul următor: Pentru orice `i` mai mic decât lungimea lui `L`, dacă `(N, M)` este perechea de pe poziția `i` din `L`, atunci pe poziția `i` din `R`, se va afla lista tuturor numerelor mai mari sau egale ca `N` și mai mici sau egale cu `M`.

Exemplu:

```
?- expand_intervals([(1, 3), (5, 5), (5, 3), (2, 6)], R).
R = [[1, 2, 3], [5], [], [2, 3, 4, 5, 6]].
```

Rezolvare:

```
expand(N, M, []) :- N > M.
expand(N, M, [N|Rest]) :-
    N <= M,
    N1 is N + 1,
    expand(N1, M, Rest).

expand_intervals([], []).
expand_intervals([(N,M)|T], [L|Rest]) :-
    expand(N, M, L),
    expand_intervals(T, Rest).
```

(P6) [1 punct] Considerăm în continuare reprezentarea formulelor logicii propoziționale folosită în laboratorul 5. Scrieți un predicat `assoc_and` care, primind ca argument două formule `Phi`, `Psi`, este adevărat dacă și numai dacă `Phi` și `Psi` sunt formate doar din conjuncții și variabile și, în plus, `Psi` se poate obține din `Phi` prin reasocierea parantezelor din ea (dar păstrând ordinea în care apar variabilele în conjuncții).

Exemplu:

```
?- assoc_and(si(si(a, b), c), si(a, si(b, c))).
true
?- assoc_and(si(si(a, b), si(c, d)), si(a, si(b, si(c, d)))).
true
?- assoc_and(si(a, b), si(b, a)).
false
?- assoc_and(a, a).
true
?- assoc_and(sau(a, sau(b, c)), sau(sau(a, b), c)).
false
```

Rezolvare:

```
flatten_and(si(A, B), Vars) :-
    flatten_and(A, VA),
    flatten_and(B, VB),
    append(VA, VB, Vars).

flatten_and(X, [X]) :- atom(X).

assoc_and(Phi, Psi) :-
    flatten_and(Phi, Vars1),
    flatten_and(Psi, Vars2),
    Vars1 = Vars2.
```

(P7) [1 punct] Definiți un predicat `dropN/3`, astfel încât, pentru orice liste `L`, `R` și număr natural `N`, `dropN(L, R, N)` este adevărat dacă și numai dacă `R` este lista care rezultă din eliminarea ultimelor `N` elemente ale lui `L`. Predicatul va fi fals în cazul în care `N` este mai mare decât lungimea lui `L`.

Exemplu:

```
?- dropN([a, b, c, b], R, 2).
R = [a, b]
?- dropN([a, b, c], R, 5).
false.
```

Rezolvare:

`dropN(L, R, N) :- append(R, L1, L), length(L1, N).`

Partea III. Probleme de tip grilă

(P8) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Fie următoarea mulțime de formule

$$\Gamma = \{(v_i \rightarrow v_{i+1}) \wedge (v_{i+1} \rightarrow v_i) \mid i \geq 1\}.$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☐ A: Γ are exact 2 modele.
- ☒ B: Γ are exact 4 modele.
- ☐ C: $Mod(\Gamma \cup \{v_1\}) \subseteq Mod(\Gamma \cup \{v_0\})$.
- ☐ D: Γ are o infinitate de modele.
- ☐ E : $\Gamma \cup \{\neg v_1 \rightarrow v_2\}$ este nesatisfiabilă.

Demonstrație:

Observăm că pentru orice evaluare e , avem că

$$\begin{aligned} &\iff e \in Mod(\Gamma) \\ &\iff \text{pentru orice } i \geq 1, e^+(v_i \leftrightarrow v_{i+1}) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } i \geq 1, e(v_i) = e(v_{i+1}) \\ &\iff \text{pentru orice } i \geq 1, e(v_i) = 0 \text{ sau pentru orice } i \geq 1, e(v_i) = 1 \end{aligned}$$

Așadar, modelele lui Γ sunt exact evaluările $e_0, e_1, e_2, e_3 : V \rightarrow \{0, 1\}$ definite prin

$$\begin{aligned} &\text{pentru orice } i \in \mathbb{N}, e_0(v_i) = 0 \\ &\text{pentru orice } i \in \mathbb{N}, e_1(v_i) = 1 \\ &e_2(v_0) = 0 \text{ și pentru orice } i \geq 1, e_2(v_i) = 1 \\ &e_3(v_0) = 1 \text{ și pentru orice } i \geq 1, e_3(v_i) = 0. \end{aligned}$$

Deci B este adevărată, iar A, D sunt false.

C: Avem că e_2 definit mai sus este model pentru $\Gamma \cup \{v_1\}$, dar nu și pentru $\Gamma \cup \{v_0\}$.

E: e_1 este model pentru $\Gamma \cup \{\neg v_1 \rightarrow v_2\}$. □

(P9) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Pentru orice mulțime de formule propoziționale $\Gamma \subseteq Form$, definim $\bar{\Gamma} = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată pentru orice $\Gamma \subseteq Form$ nevidă?

- ☐ A: Pentru orice evaluare e , avem că $e \in Mod(\bar{\Gamma})$ dacă și numai dacă $e \notin Mod(\Gamma)$.
- ☐ B: Dacă Γ este nesatisfiabilă, atunci $\bar{\Gamma}$ este satisfiabilă.
- ☐ C: $Mod(\Gamma) \neq Mod(\bar{\Gamma})$.
- ☐ D: $\Gamma \cap \bar{\Gamma}$ este nesatisfiabilă.
- ☒ E: $\Gamma \cup \bar{\Gamma}$ este nesatisfiabilă.

Demonstrație:

Contraexemplul $\Gamma = \{v_0, \neg v_0\}$ arată că A, B, C, D sunt false.

E: Presupunem că există $e \in Mod(\Gamma \cup \bar{\Gamma})$. Deoarece Γ este nevidă, putem alege $\varphi \in \Gamma$. Vom avea că $\neg\varphi \in \bar{\Gamma}$, de unde obținem că $e^+(\varphi) = e^+(\neg\varphi) = 1$, ceea ce este o contradicție. $\square$

(P10) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă propozițională:

$$\varphi = (v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \rightarrow v_4.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☒ A: $\varphi \sim v_0 \rightarrow (v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_3 \rightarrow v_4)))$.
- ☐ B: $\varphi \sim (((v_0 \rightarrow v_1) \rightarrow v_2) \rightarrow v_3) \rightarrow v_4$.
- ☐ C: $\varphi \models v_1 \rightarrow v_4$.
- ☐ D: $\varphi \models (v_0 \vee v_1 \vee v_2 \vee v_3) \rightarrow v_4$.
- ☒ E: $\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3 \vee v_4$ este FND și FNC pentru φ .

Demonstrație:

A: se aplică succesiv echivalența $\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$.

E: Avem

$$\begin{aligned} (v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \rightarrow v_4 &\sim \\ \neg(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \vee v_4 &\sim \\ \neg v_0 \vee \neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3 \vee v_4, \end{aligned}$$

unde ultima formulă este atât în FND, cât și în FNC.

Fie e o evaluare cu $e(v_1) = 1$ și $e(v_0) = e(v_2) = e(v_3) = e(v_4) = 0$. Avem

B: $e \models \varphi$, dar $e \not\models (((v_0 \rightarrow v_1) \rightarrow v_2) \rightarrow v_3) \rightarrow v_4$

C: $e \models \varphi$, dar $e \not\models v_1 \rightarrow v_4$

D: $e \models \varphi$, dar $e \not\models (v_0 \vee v_1 \vee v_2 \vee v_3) \rightarrow v_4$

$\square$

(P11) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conține exact un simbol de funcție de aritate 2, notat $\dot{\times}$. Considerăm următoarea formulă a lui $\mathcal{L}$

$$\varphi = \forall x \forall y (x = y \dot{\times} y \rightarrow \forall z (x = z \dot{\times} z \rightarrow y = z)),$$

unde x, y și z sunt variabile distincte două câte două. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

☒ A: $(\mathbb{N}, \cdot) \models \varphi$.

☐ B: $(\mathbb{Q}, \cdot) \models \varphi$.

☒ C: $\varphi \models \forall x \forall y \forall z (x = y \dot{\times} y \rightarrow (x = z \dot{\times} z \rightarrow y = z))$.

☐ D: $\varphi \models \forall x \forall y \exists z (x = y \dot{\times} y \rightarrow (x = z \dot{\times} z \rightarrow y = z))$.

☐ E: $\varphi \models \forall x (\exists y (x = y \dot{\times} y) \rightarrow \forall z (x = z \dot{\times} z \rightarrow y = z))$.

Demonstrație:

Observăm că φ este satisfăcut în $(\mathbb{N}, \cdot)$ (sau $(\mathbb{Q}, \cdot)$) dacă și numai dacă pentru orice număr din $\mathbb{N}$ (resp. din $\mathbb{Q}$), dacă acesta are o ‘rădăcină pătrată’, aceasta este unică. Afirmația este adevărată în $\mathbb{N}$, dar nu și în $\mathbb{Q}$ (e.g. $1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) = 1$). Formula de la C este o formă normală prenex pentru φ . $\square$

(P12) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi conținând un simbol de relație binară P și un simbol de relație unară Q . Fie următoarea formulă a lui $\mathcal{L}$

$$\varphi = \forall x \exists y \forall u \exists z (P(x, y) \rightarrow (P(u, u) \rightarrow \neg Q(z))),$$

unde x, y, u și z sunt variabile distincte două câte două. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

☒ A: φ este o formă normală prenex pentru formula

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow (\neg \forall x \neg P(x, x) \rightarrow \neg \forall z Q(z)).$$

☒ B: $\forall x \forall u (P(x, g(x)) \rightarrow (P(u, u) \rightarrow \neg Q(h(x, u))))$ este o formă normală Skolem pentru φ , unde g și h sunt simboluri noi de funcție de aritate 1, respectiv 2.

☐ C: φ este o formă normală prenex pentru formula

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow (\exists x P(x, x) \rightarrow \forall z Q(z)).$$

☐ D: $\forall x \forall u (P(x, g(x, u)) \rightarrow (P(u, u) \rightarrow \neg Q(h(x, u))))$ este o formă normală Skolem pentru φ , unde g și h sunt simboluri noi de funcție de aritate 2.

☐ E: φ este atât în formă normală prenex, cât și în formă normală Skolem.

Demonstrație:

Varianta A este corectă pentru forma prenex:

$$\begin{aligned}
& \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow (\neg \forall x \neg P(x, x) \rightarrow \neg \forall z Q(z)) \models \\
& \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow (\exists x P(x, x) \rightarrow \exists z \neg Q(z)) \models \\
& \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow (\exists u P(u, u) \rightarrow \exists z \neg Q(z)) \models \\
& \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall u \exists z (P(u, u) \rightarrow \neg Q(z)) \models \\
& \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow \forall u \exists z (P(u, u) \rightarrow \neg Q(z))) \models \\
& \forall x \exists y \forall u \exists z (P(x, y) \rightarrow (P(u, u) \rightarrow \neg Q(z)))
\end{aligned}$$

□

(P13) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Considerăm următoarea mulțime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_0, v_1, \neg v_2\}, \{v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_2\}\}$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

☒ A: $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.

☐ B: $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

☐ C: $\{v_1\}$ este rezolvent al două clauze din $\mathcal{S}$.

☐ D: $\{v_0\}$ este rezolvent al două clauze din $\mathcal{S}$.

☐ E: Rulând algoritmul Davis-Putnam pe mulțimea $\mathcal{S}$, vom obține $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$, unde N este numărul de pași după care algoritmul se termină.

Demonstrație:

Se observă că o evaluare e cu $e(v_0) = e(v_1) = 1$ și $e(v_2) = 0$ satisface $\mathcal{S}$. Rezultă că A este adevărată și B, E sunt false. Se observă că $\{v_0\}$ și $\{v_1\}$ nu se pot obține ca rezolvenți din două clauze din $\mathcal{S}$. □

(P14) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Considerăm următorul program Prolog.

```
p(Xs, [0|Rest]) :-
    p1(Xs, 0, 1, Rest).
```

```
p1([], _, _, []).
```

```
p1([X|Xs], S, P, [P2|Rest]) :-
    S2 is S + X,
    P2 is P * X,
    p2(Xs, S2, P2, Rest).
```

```

p2([], _, _, []).
p2([X|Xs], S, P, [S2|Rest]) :-
    S2 is S + X,
    P2 is P * X,
    p1(Xs, S2, P2, Rest).

```

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☐ Răspunsul interogării ?- p([2, 2, 2, 2, 2, 2], R). este R = [0, 2, 4, 8, 16, 32].
- ☐ Răspunsul interogării ?- p([1, 1, 1, 1]). este R = [0, 1, 2, 3]
- ☐ Răspunsul interogării ?- p([], []). este true.
- ☐ Răspunsul interogării ?- p([], R). este false.
- ☒ Răspunsul interogării ?- p([2, 2, 2, 2, 2, 2], R). este R = [0, 2, 4, 8, 8, 32, 12]

(P15) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte]

Considerăm următorul program Prolog:

```

p([], []).

p([_|T], S) :- p(T, S).

p([X|T], [X|S]) :- p_from(T, X, S).

p_from([], _, []).

p_from([_|T], Last, S) :- p_from(T, Last, S).

p_from([X|T], Last, [X|S]) :- X > Last, p_from(T, X, S).

```

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☒ Răspunsul interogării p([4,6,8,3,4,78,5,2,6], [3, 4, 5, 6]) este true.
- ☐ Răspunsul interogării p([4,6,8,3,4,78,5,2,6], [4, 3]) este true.
- ☐ Pentru orice listă L, există o singură valoare posibilă pentru R astfel încât interogarea ?- p(L, R) să aibă răspunsul true.
- ☒ Răspunsul interogării p([6, 5, 4, 3, 2, 1], []) este true.
- ☐ Nu există nicio valoare pentru R astfel încât răspunsul interogării p([6, 5, 4, 3, 2, 1], R) să fie true