

Model de examen

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1 punct] Fie LP logica propozițională, $\mathcal{E}$ o mulțime de evaluări și

$$\Gamma = \{\psi \in Form \mid e \models \psi \text{ pentru orice } e \in \mathcal{E}\}.$$

Presupunem că $\mathcal{E}$ are cel puțin două elemente. Demonstrați că există o formulă φ cu proprietatea că $\varphi \notin \Gamma$ și $\neg\varphi \notin \Gamma$.

(P2) [1 punct] Fie LP logica propozițională și $\varphi, \psi \in Form$. Demonstrați sintactic că:

$$\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi.$$

(P3) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$. Demonstrați următoarele:

(i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(ii) $Th(\Gamma)$ este o $\mathcal{L}$ -teorie.

(iii) Fie T o $\mathcal{L}$ -teorie a.î. $\Gamma \subseteq T$. Atunci $Th(\Gamma) \subseteq T$.

(P4) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea că

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Notăm cu $\mathcal{M}$ clasa modelelor finite ale lui Γ . Demonstrați că $\mathcal{M}$ nu este axiomatizabilă.

Partea II. Probleme de laborator cu rezolvare clasică

(P5) [1 punct] Definiți un predicat `expand_intervals/2` care, pentru o listă de perechi de numere naturale, calculează lista `R` formată în felul următor: Pentru orice `i` mai mic decât lungimea lui `L`, dacă `(N, M)` este perechea de pe poziția `i` din `L`, atunci pe poziția `i` din `R`, se va afla lista tuturor numerelor mai mari sau egale ca `N` și mai mici sau egale cu `M`.

Exemplu:

```
?- expand_intervals([(1, 3), (5, 5), (5, 3), (2, 6)], R).  
R = [[1, 2, 3], [5], [], [2, 3, 4, 5, 6]].
```

(P6) [1 punct] Considerăm în continuare reprezentarea formulelor logicii propoziționale folosită în laboratorul 5. Scrieți un predicat `assoc_and` care, primind ca argument două formule `Phi`, `Psi`, este adevărat dacă și numai dacă `Phi` și `Psi` sunt formate doar din conjuncții și variabile și, în plus, `Psi` se poate obține din `Phi` prin reasocierea parantezelor din ea (dar păstrând ordinea în care apar variabilele în conjuncții).

Exemplu:

```
?- assoc_and(si(si(a, b), c), si(a, si(b, c))).  
true  
?- assoc_and(si(si(a, b), si(c, d)), si(a, si(b, si(c, d)))).  
true  
?- assoc_and(si(a, b), si(b, a)).  
false  
?- assoc_and(a, a).  
true  
?- assoc_and(sau(a, sau(b, c)), sau(sau(a, b), c)).  
false
```

(P7) [1 punct] Definiți un predicat `dropN/3`, astfel încât, pentru orice liste `L`, `R` și număr natural `N`, `dropN(L, R, N)` este adevărat dacă și numai dacă `R` este lista care rezultă din eliminarea ultimelor `N` elemente ale lui `L`. Predicatul va fi fals în cazul în care `N` este mai mare decât lungimea lui `L`.

Exemplu:

```
?- dropN([a, b, c, b], R, 2).  
R = [a, b]  
?- dropN([a, b, c], R, 5).  
false.
```

Partea III. Probleme de tip grilă

(P8) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Fie următoarea mulțime de formule

$$\Gamma = \{(v_i \rightarrow v_{i+1}) \wedge (v_{i+1} \rightarrow v_i) \mid i \geq 1\}.$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☐ A: Γ are exact 2 modele.
- ☐ B: Γ are exact 4 modele.
- ☐ C: $Mod(\Gamma \cup \{v_1\}) \subseteq Mod(\Gamma \cup \{v_0\})$.
- ☐ D: Γ are o infinitate de modele.
- ☐ E: $\Gamma \cup \{\neg v_1 \rightarrow v_2\}$ este nesatisfiabilă.

(P9) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Pentru orice mulțime de formule propoziționale $\Gamma \subseteq Form$, definim $\bar{\Gamma} = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată pentru orice $\Gamma \subseteq Form$ nevidă?

- ☐ A: Pentru orice evaluare e , avem că $e \in Mod(\bar{\Gamma})$ dacă și numai dacă $e \notin Mod(\Gamma)$.
- ☐ B: Dacă Γ este nesatisfiabilă, atunci $\bar{\Gamma}$ este satisfiabilă.
- ☐ C: $Mod(\Gamma) \neq Mod(\bar{\Gamma})$.
- ☐ D: $\Gamma \cap \bar{\Gamma}$ este nesatisfiabilă.
- ☐ E: $\Gamma \cup \bar{\Gamma}$ este nesatisfiabilă.

(P10) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă propozițională:

$$\varphi = (v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \rightarrow v_4.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A: $\varphi \sim v_0 \rightarrow (v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_3 \rightarrow v_4)))$.
- ☐ B: $\varphi \sim (((v_0 \rightarrow v_1) \rightarrow v_2) \rightarrow v_3) \rightarrow v_4$.
- ☐ C: $\varphi \models v_1 \rightarrow v_4$.
- ☐ D: $\varphi \models (v_0 \vee v_1 \vee v_2 \vee v_3) \rightarrow v_4$.
- ☐ E: $\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3 \vee v_4$ este FND și FNC pentru φ .

(P11) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conține exact un simbol de funcție de aritate 2, notat $\dot{\times}$. Considerăm următoarea formulă a lui $\mathcal{L}$

$$\varphi = \forall x \forall y (x = y \dot{\times} y \rightarrow \forall z (x = z \dot{\times} z \rightarrow y = z)),$$

unde x, y și z sunt variabile distincte două câte două. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A: $(\mathbb{N}, \cdot) \models \varphi$.
- ☐ B: $(\mathbb{Q}, \cdot) \models \varphi$.

- ☐ C: $\varphi \models \forall x \forall y \forall z (x = y \dot{\times} y \rightarrow (x = z \dot{\times} z \rightarrow y = z))$.
☐ D: $\varphi \models \forall x \forall y \exists z (x = y \dot{\times} y \rightarrow (x = z \dot{\times} z \rightarrow y = z))$.
☐ E: $\varphi \models \forall x (\exists y (x = y \dot{\times} y) \rightarrow \forall z (x = z \dot{\times} z \rightarrow y = z))$.

(P12) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi conținând un simbol de relație binară P și un simbol de relație unară Q . Fie următoarea formulă a lui $\mathcal{L}$

$$\varphi = \forall x \exists y \forall u \exists z (P(x, y) \rightarrow (P(u, u) \rightarrow \neg Q(z))),$$

unde x, y, u și z sunt variabile distincte două câte două. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A: φ este o formă normală prenex pentru formula

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow (\neg \forall x \neg P(x, x) \rightarrow \neg \forall z Q(z)).$$

- ☐ B: $\forall x \forall u (P(x, g(x)) \rightarrow (P(u, u) \rightarrow \neg Q(h(x, u))))$ este o formă normală Skolem pentru φ , unde g și h sunt simboluri noi de funcție de aritate 1, respectiv 2.

- ☐ C: φ este o formă normală prenex pentru formula

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow (\exists x P(x, x) \rightarrow \forall z Q(z)).$$

- ☐ D: $\forall x \forall u (P(x, g(x, u)) \rightarrow (P(u, u) \rightarrow \neg Q(h(x, u))))$ este o formă normală Skolem pentru φ , unde g și h sunt simboluri noi de funcție de aritate 2.

- ☐ E: φ este atât în formă normală prenex, cât și în formă normală Skolem.

(P13) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Considerăm următoarea mulțime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_0, v_1, \neg v_2\}, \{v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_2\}\}$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☐ A: $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
☐ B: $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
☐ C: $\{v_1\}$ este rezolvent al două clauze din $\mathcal{S}$.
☐ D: $\{v_0\}$ este rezolvent al două clauze din $\mathcal{S}$.
☐ E: Rulând algoritmul Davis-Putnam pe mulțimea $\mathcal{S}$, vom obține $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$, unde N este numărul de pași după care algoritmul se termină.

(P14) [0,5 puncte; 1 răspuns corect] Considerăm următorul program Prolog.

```
p(Xs, [0|Rest]) :-  
    p1(Xs, 0, 1, Rest).
```

```
p1([], _, _, []).
```

```
p1([X|Xs], S, P, [P2|Rest]) :-
    S2 is S + X,
    P2 is P * X,
    p2(Xs, S2, P2, Rest).
```

```
p2([], _, _, []).
p2([X|Xs], S, P, [S2|Rest]) :-
    S2 is S + X,
    P2 is P * X,
    p1(Xs, S2, P2, Rest).
```

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☐ Răspunsul interogării ?- p([2, 2, 2, 2, 2, 2], R). este R = [0, 2, 4, 8, 16, 32].
- ☐ Răspunsul interogării ?- p([1, 1, 1, 1]). este R = [0, 1, 2, 3]
- ☐ Răspunsul interogării ?- p([], []). este true.
- ☐ Răspunsul interogării ?- p([], R). este false.
- ☐ Răspunsul interogării ?- p([2, 2, 2, 2, 2, 2], R). este R = [0, 2, 4, 8, 8, 32, 12]

(P15) [0,5 puncte; 2 răspunsuri corecte]

Considerăm următorul program Prolog:

```
p([], []).
```

```
p([_|T], S) :- p(T, S).
```

```
p([X|T], [X|S]) :- p_from(T, X, S).
```

```
p_from([], _, []).
```

```
p_from([_|T], Last, S) :- p_from(T, Last, S).
```

```
p_from([X|T], Last, [X|S]) :- X > Last, p_from(T, X, S).
```

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ Răspunsul interogării p([4,6,8,3,4,78,5,2,6], [3, 4, 5, 6]) este true.
- ☐ Răspunsul interogării p([4,6,8,3,4,78,5,2,6], [4, 3]) este true.
- ☐ Pentru orice listă L, există o singură valoare posibilă pentru R astfel încât interogarea ?- p(L, R) să aibă răspunsul true.
- ☐ Răspunsul interogării p([6, 5, 4, 3, 2, 1], []) este true.
- ☐ Nu există nicio valoare pentru R astfel încât răspunsul interogării p([6, 5, 4, 3, 2, 1], R) să fie true